1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – elmélet** **2020-06-04**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyításos részre 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba, vagy külön lapon a feladatlap beosztásának megfelelő helyre, jól láthatóan elkülönítve az egyes feladatokat! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

b) Minden $f : V \to V$ lineáris transzformációra igaz, hogy $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

c) Ha egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix négyzete diagonalizálható, akkor A is diagonalizálható.

d) Ha egy komplex mátrix minden sajátértéke 1 abszolút értékű, akkor a mátrix unitér.

e) Ha a C valós mátrix teljes oszloprangú, akkor $C^T C$ pozitív definit.

f) Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix bármely invariáns alterének a merőleges kiegészítője is A-invariáns.

2. Mondjuk ki azokat a vektortér-axiómákat, amelyekben testművelet (skalárok közötti művelet) is szerepel!

3. Hányféle különböző koordinátavektora lehet a $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ vektornak azokban a bázisokban, amelyek a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ elemekből állnak, de a sorrendet bárhogy megválaszthatjuk. Írjuk is fel a lehetséges koordinátavektorokat!

4. Adjunk meg két ekvivalens feltételt arra, hogy egy P négyzetes mátrix valamely vetítés mátrixa legyen!

5. Mi lehet a minimálpolinomja annak a nem diagonalizálható mátrixnak, amelynek karakterisztikus polinomja $k(x) = (x-1)^2x^2$?

6. Adjunk felső becslést a CSB-egyenlőtlenség segítségével az $|a - 2b + 2c|$ értékre, ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, és $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

7. Mit jelent az, hogy egy $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ komplex bilineáris függvény hermitikus?

8. Mi a Jordan-alakja és minimálpolinomja az A mátrixnak, ha $\mathbb{R}^5$-nek bázisa $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\}$, és

$\mathbf{0} \xleftarrow{A-I} \mathbf{b}_1 \xleftarrow{A-I} \mathbf{b}_2$,

$\mathbf{0} \xleftarrow{A} \mathbf{b}_3 \xleftarrow{A} \mathbf{b}_4$,

$\mathbf{0} \xleftarrow{A} \mathbf{b}_5$?

9. Mit jelent az, hogy a V vektortér a W_i $(i \in I)$ altereinek direkt összege? *(2 pont)*

10. Definiáljuk az általánosított sajátalteret! *(2 pont)*

11. Mondjuk ki a komplex normális mátrixokra vonatkozó spektráltételt mátrixos alakban! Mit jelent ez a feltétel a sajátvektorokra nézve? *(3 pont)*

12. Mondjuk ki a mátrix hatványainak konvergenciájáról szóló tételt! *(3 pont)*

A következő két feladatot külön lapon oldjuk meg!

13. Bizonyítsuk be, hogy önadjungált mátrix minden sajátértéke valós, míg unitéré 1 abszolút értékű! *(4 pont)*

14. a) Ellenőrizzük a Cayley–Hamilton-tétel állítását az alábbi A mátrixra!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

b) A Cayley–Hamilton tétel bizonyításának az elején felírjuk az $A-xI$ mátrixot mátrixegyütthatós polinomként (ld. lent). Tegyük meg ezt konkréten a fenti A mátrixra! *(4 pont)*

Az A karakterisztikus polinomja $\det(A - xI) = k_A(x) = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Tudjuk: $(A - xI)\,\mathrm{adj}(A - xI) = \det(A - xI)I = k_A(x)I$.

$A - xI$ bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns x egy legföljebb $n - 1$-edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű A_0, A_1,…, A_{n-1} mátrixok, hogy

$$\mathrm{adj}(A - xI) = x^{n-1}A_{n-1} + \ldots + xA_1 + A_0.$$