E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – gyakorlat** **2020-05-28**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, akkor mi az $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ transzformáció mátrixa a $\{2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bázisban?

E2. Legyen $U = \operatorname{span}((1, 2, 3)) \leq V = \mathbb{R}^3$. Adjunk meg két különböző vektort V-ben, amelyeknek az U-ra vett merőleges vetülete $(-1, -2, -3)$.

E3. Mi a karakterisztikus és minimálpolinomja annak a 0 nyomú 3×3-as mátrixnak, amelynek van két független sajátvektora a $\lambda = 2$ sajátértékhez?

E4. Mi a legjobb felső becslés A spektrálsugarára a Gersgorin-körök alapján, ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-i & 0 \end{bmatrix} \ ?$$

E5. Milyen $a, b \in \mathbb{C}$-re önadjungált az $A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ 1-i & bi \end{bmatrix}$ mátrix?

E6. Mi a 2-normája az $A = UDV$ mátrixnak, ha U, V unitér, és $D = \operatorname{diag}(1, 3, 1)$?

E7. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ nilpotens, és $r(A^2) = 1$. Mi az A minimálpolinomja?

E8. Írjuk fel az e^{J^3} mátrixot, ha $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

---

1. Melyikek hasonlók az alábbi mátrixok közül? A hasonlók ortogonálisan is hasonlók-e?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Legyen $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, $f : p(x) \mapsto p'(x) + xp(1)$. Írjuk fel f mátrixát a standard bázisban, és a $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ bázispárban, ahol $\mathcal{B} = \{1 + x, x - x^2, x^2\}$ és $\mathcal{C} = \{1, 1 + x\}$. Adjuk meg f magterének egy bázisát!

3. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges módszerrel!

4. Határozzuk meg az alábbi A mátrixhoz tartozó $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ kvadratikus alak jellegét, és adjunk meg olyan bázist $\mathbb{R}^3$-ben, amelyben a kvadratikus alak mátrixa diagonális!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Számítsuk ki az A mátrix redukált SVD-felbontását, és legjobb 1 rangú közelítését, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Mi az $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ mátrix Jordan-féle normálalakja és minimálpolinomja, ha A hatványainak rangja rendre $5, 3, 3$, és $A - 2I$ hatványaié $6, 5, 4, 4$?

7. Adjuk meg az $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$, $x_0 = x_1 = 1$ sorozat n-edik tagját n függvényeként!

8. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-normálalakját, és adjunk meg hozzá egy Jordan-bázist!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$