E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – gyakorlat** **2020-06-04**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, akkor mi a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixa a $\{2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bázisban?

E2. Mik alkotják a magterét, és mi a rangja az $A \mapsto A + A^T$ transzformációnak az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortéren?

E3. Mi a nyoma és a determinánsa egy olyan valós 3×3-as A mátrixnak, amelynek 1 és $1+i$ is sajátértéke?

E4. Adjuk meg annak a Givens-forgatásnak a mátrixát, amelyik az $(1, 0, -1)$ vektort a $(\sqrt{2}, 0, 0)$ vektorba viszi!

E5. Legyen $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, amelyre $\operatorname{tr} M = 0$, és $\det M = d$. Párosítsuk a betűvel és számmal jelölt tulajdonságokat!

(A): M önadjungált	(1): $d \le 0$
(B): M ferdén önadjungált	(2): $\lvert d\rvert = 1$
(C): M unitér	(3): $d \ge 0$ valós.

E6. Számítsuk ki az A mátrix pszeudoinverzét, ha az A redukált SVD felbontása

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [\,3\,] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

E7. Hány lényegesen különböző (azaz egymásba báziscserével nem átvihető) kvadratikus alak van $\mathbb{R}^2$-en?

E8. Írjuk át az $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ rekurziót mátrixos alakba!

---

1. Legyen $f : \mathbb{R}[x]_{\le 1} \to \mathbb{R}[x]_{\le 2}$, $\ f : p(x) \mapsto xp(x) + p'(x)$. Írjuk fel f mátrixát a standard bázisban, és a $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ bázispárban, ahol $\mathcal{B} = \{1 - x, x\}$ és $\mathcal{C} = \{1, x - x^2, x^2\}$.

2. Ortogonalizáljuk az

$$\{(1,0,i),(2,1,0),(1,-3,i)\}$$

vektorrendszert Gram–Schmidt-ortogonalizációval (ebben a sorrendben)!

3. Írjuk fel az $x^2-4xy+5y^2+2xz+5z^2$ kvadratikus alak mátrixát, határozzuk meg a jellegét, továbbá adjunk meg olyan nemnulla vektorokat (ha vannak), amelyeken a kvadratikus alak pozitív, negatív, illetve nulla értéket vesz föl!

4. Határozzuk meg az $A=\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix pozitív szemidefinit négyzetgyökét!

5. Írjuk fel az alábbi A mátrix redukált és teljes QR-felbontását.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az alábbi A mátrixnak és A^2-nek a Jordan-normálalakját!

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Hasonlóság erejéig hány olyan 6×6-os mátrix van, amelynek csak 1 és 2 a sajátértékei, és az 1-hez tartozó sajátaltere 3-dimenziós?

8. Milyen alsó és fölső korlátot adnak az alábbi gráf spektrálsugarára a fokszámok? Mutassuk meg, hogy 0 és 1 is sajátértéke a gráfnak!