Bevezetés az algebrába 2

Vektorterek és lineáris leképezések

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Az absztrakt vektortér fogalma

D **Vektortér**

Legyen K test.

$\mathcal{V}$ vektortér K fölött (jele $\mathcal{V} = \mathcal{V}_K$), ha

értlemezve van rajta: $\begin{cases} \mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathcal{V} & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\text{-re}, \\ \lambda \mathbf{v} \in \mathcal{V} & \forall \lambda \in K,\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}\text{-re}, \end{cases}$

és teljesülnek

(A1) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

(A2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(A3) $\exists \mathbf{0} : \mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}\ \forall \mathbf{v}$

(A4) $\forall \mathbf{v}\ \exists(-\mathbf{v})\text{:}\ \mathbf{v}+(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(S1) $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

(S2) $(\lambda+\mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{v}$

(S3) $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$

(S4) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

ahol $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, $\lambda, \mu \in K$.

$\mathcal{V}$ elemei vektorok, K elemei skalárok.

Az (A1)–(A4), (S1)–(S4) állítások a vektortér axiómái.

Mj (A1)–(A4) $\Rightarrow (\mathcal{V}, +)$ Abel-csoport.

Mj Belátható, hogy $(A1)$ következik a többi hét axiómából.

Á Egy vektortérben $\mathbf{0}$ egyértelmű, és $-\mathbf{v}$ egyértelmű minden $\mathbf{v}$-re. Továbbá $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ és $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$-re.

B

- Tfh $\mathbf{0}$ és $\mathbf{0}'$ is kielégíti az (A3) axiómát. Ekkor $\mathbf{0} \overset{(A3)}{=} \mathbf{0} + \mathbf{0}' \overset{(A1)}{=} \mathbf{0}' + \mathbf{0} \overset{(A3)}{=} \mathbf{0}'$.
- Ha $\mathbf{v}'$ és $\mathbf{v}''$ is megfelel $-\mathbf{v}$-nek, akkor $\mathbf{v}' \overset{(A3)}{=} \mathbf{v}' + \mathbf{0} \overset{(A4)}{=} \mathbf{v}' + (\mathbf{v} + \mathbf{v}'') \overset{(A2)}{=} (\mathbf{v}' + \mathbf{v}) + \mathbf{v}'' \overset{(A1)}{=} (\mathbf{v} + \mathbf{v}') + \mathbf{v}'' \overset{(A4)}{=} \mathbf{0} + \mathbf{v}'' \overset{(A1)}{=} \mathbf{v}'' + \mathbf{0} \overset{(A3)}{=} \mathbf{v}''$.
- $0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} \overset{S2}{=} 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$, így $\mathbf{0} \overset{(A4)}{=} 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = (0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}) + (-0\mathbf{v}) \overset{(A2)}{=} 0\mathbf{v} + (0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v})) \overset{(A4)}{=} 0\mathbf{v} + \mathbf{0} \overset{(A3)}{=} 0\mathbf{v}$.
- $\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} \overset{(S4)}{=} 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} \overset{(S2)}{=} (1 + (-1))\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, így a $-\mathbf{v}$ egyértelműsége miatt $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

P Példák vektorterekre:

- K^n, $K^{m\times n}$
- $K[x]$, $K[x,y]$, ... polinomgyűrűk
- $K[x]_{\leqslant n} = \{f(x) \in K[x] \mid \deg f \leqslant n\}$
- $K[[x]] = \left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_i \in K\ \forall i \right\}$ formális hatványsorok (összeadás, skalárral való szorzás komponensenként)
- $C(\mathbb{R})$: folytonos valós függvények
- $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$: az $\mathbb{R}$-ben érvényes testaxiómákból következik, hogy $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{Q}$ fölött. Általában is: ha $K \leqslant L$ testek, akkor L vektortér K fölött.
- X halmaz $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ hatványhalmaz vektortér $\mathbb{Z}_2$ fölött a szimmetrikus differenciával ($\triangle$) mint összeadással, és a $0 \cdot A = \emptyset$ és $1 \cdot A = A$ skalárral való szorzással.

Altér, generátorrendszer, bázis

D $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ altere $\mathcal{V}$-nek, ha $\mathcal{U} \neq \emptyset$, és $\mathcal{U}$ zárt a műveletekre nézve, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U},\ \lambda \in K \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v},\ \lambda\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. $(\Rightarrow \mathbf{0} \in \mathcal{U})$ Jele: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.

P $K[x]_{\leqslant n} \leqslant K[x]$,

$\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$,
$\left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, sőt résztest is
$\left\{a\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q}\right\} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, de nem résztest.

D Lineáris kombináció: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i \ (\lambda_i \in K,\ \mathbf{v}_i \in \mathcal{V})$

$S \subseteq \mathcal{V}$ halmaz lineárisan független (ftln), ha

$\forall \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in S$ különböző vektorokra: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \lambda_i = 0\ \forall i$.

Lineárisan összefüggő (öf), ha nem ftln.

K S ftln $\iff$ $\forall$ véges részhalmaza ftln

D $S \subseteq \mathcal{V}$ generátorrendszer (genrsz), ha $\mathcal{V}$ minden eleme előáll S véges sok elemének lin. komb.-jaként.

$S \subseteq \mathcal{V}$ bázis, ha ftln és genrsz.

$S \subseteq \mathcal{V}$-re $\operatorname{span}(S) = \bigcap_{S \subseteq \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}} \mathcal{W} = \{S \text{ elemeinek lin. komb.-i}\} \cup \{\mathbf{0}\}$

az S által kifeszített (generált) altér.

Mj Véges bázist többnyire egy rögzített rendezéssel (indexeléssel) adunk meg, hogy a koordinátázás egyértelmű legyen.

D $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathcal{V}$ bázisra $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ koordinátavektora

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ ha } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b}_i$$

(Ez egyértelmű, ha $\mathcal{B}$ bázis.)

Mj A genrsz-ről, ftln halmazról, bázisról szóló következő két tétel ugyanúgy bizonyítható az általános esetben, ahogy K^n-ben bizonyítottuk.

T **Generátorrendszerek és független halmazok tulajdonságai**

$S \subseteq T \subseteq \mathcal{V}_K$.

(1) S genrsz $\Rightarrow$ T is genrsz.

(2) S genrsz, $\mathbf{v} \in \mathrm{span}(S \setminus \{\mathbf{v}\}) \Rightarrow S \setminus \{\mathbf{v}\}$ is genrsz.

(3) T ftln $\Rightarrow$ S is ftln.

(4) T ftln, $\mathbf{v} \notin \mathrm{span}(T) \Rightarrow T \cup \{\mathbf{v}\}$ is ftln.

T **Bázis jellemzése**

$S \subseteq \mathcal{V}_K$-ra ekvivalens:

(i) S ftln és genrsz (azaz S bázis)

(ii) S minimális genrsz $\mathcal{V}$-ben

(iii) S maximális ftln $\mathcal{V}$-ben

(iv) $\mathcal{V}$ minden eleme egyértelműen felírható S-beliek lin. komb.-jaként.

P1 $K[x]$-nek nincs véges bázisa, ui. ha $S = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$-re $n := \max_i \deg f_i(x) \Rightarrow \operatorname{span}(S) \leqslant K[x]_{\leqslant n} \neq K[x]$.

Viszont $\{1, x, x^2, \dots\}$ bázisa $K[x]$-nek (ez a standard bázisa):

genrsz, mert tetsz. $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ az $1, x, \dots$ polinomok lin. komb.-ja,

és ftln, mert $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{n_i} = 0$, $n_1 < \dots < n_k \Rightarrow \lambda_i = 0\ \forall i$.

P2 $K[x, y]$-nak bázisát adják az 1 főegyütthatós "monomok":

$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ x^3,\ x^2y, \dots$.

P3 $K[[x]]$-nek nem genrsz-e $\{1, x, x^2, \dots\}$, ui. pl. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ nem áll elő véges sok x-hatvány lin. komb.-jaként. (Nincs is megszámlálható bázisa.)

F Adjunk meg egy bázist $(\mathcal{P}(X), \triangle)_{\mathbb{Z}_2}$-ben, ha X véges!

A halmazelméleti kiválasztási axióma egyik ekvivalens megfogalmazása a Zorn-lemma.

A Zorn-lemma speciális alakja:

(az algebrában többnyire ezt használjuk)

X halmaz, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ láncra $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{H}$. Ekkor $\mathcal{H}$-nak van a tartalmazásra nézve maximális eleme.
(Lánc: $\forall\ A, B \in \mathcal{C}$-re $A \subseteq B$ vagy $B \subseteq A$)

T **Bázis létezése**

Minden vektortérnek van bázisa.

B Legyenek $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ elemei a $\mathcal{V}$ vektortér ftln részhalmazai.

$\mathcal{H}$-ra teljesül a Zorn-lemma feltétele:

ha $\mathcal{C} = \{S_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{H}$ lánc, és $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, akkor S ftln:

ha $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ S-ben, $\forall$ $\mathbf{v}_j$-hez $\exists$ $S_{i_j} \ni \mathbf{v}_j$.

Ez véges sok elem $\mathcal{C}$-ben $\Rightarrow$ van köztük tartalmazásra legnagyobb

$\Rightarrow \exists i$: $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in S_i$, de S_i ftln $\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Így $\mathcal{H}$-ban van maximális elem, azaz $\mathcal{V}$-ben van maximális ftln részhalmaz, és a bázis jellemzései közül a (iii) szerint ez bázis.

P $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$-nak is van bázisa (Hamel-bázis), bár itt nem tudunk konkrétan megadni ilyet.

T **Tétel**

1) $\forall$ ftln részhalmaz kibővíthető bázissá
2) $\forall$ genrsz leszűkíthető bázissá

B 1): Tfh $S \subseteq \mathcal{V}$ ftln. $\mathcal{H}$ elemei legyenek a $\mathcal{V}$-nek az S-et tartalmazó ftln részhalmazai. A Zorn-lemma miatt ezek között van maximális, és az $\mathcal{V}$-ben is maximális ftln.

2): Tfh $S \subseteq \mathcal{V}$ genrsz. $\mathcal{H}$ elemei legyenek az S ftln részhalmazai. A Zorn-lemma miatt $\exists$ $S_0 \subseteq S$ max. ftln.

$\Rightarrow \forall \mathbf{s} \in S$-re $\mathbf{s} \in \operatorname{span}(S_0) \Rightarrow S \subseteq \operatorname{span}(S_0) \leqslant \mathcal{V} \Rightarrow$
$\mathcal{V} = \operatorname{span}(S) \leqslant \operatorname{span}(S_0) \Rightarrow S_0$ genrsz is $\Rightarrow S_0$ bázis.

Lineáris leképezések és transzformációk

D **Lineáris leképezés**

$f : \mathcal{V}_K \to \mathcal{W}_K$ leképezés lineáris leképezés, ha

$$\left.\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) & = & f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}) \\ f(\lambda\mathbf{v}) & = & \lambda f(\mathbf{v}) \end{array}\right. \qquad \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V},\ \lambda \in K\text{-ra.}$$

$\mathcal{V} = \mathcal{W}$ esetén ez lineáris transzformáció.

K f lin. lekép. $\Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ui. $f(\mathbf{0}) = f(0\cdot\mathbf{0}) = 0\cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

P1 $K[x]$-en a deriválás lin. transzformáció (sőt, $K[x]_{\leqslant n}$-en is):
$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ és $(cf(x))' = cf'(x)$.

P2 $A \in K^{m\times n}$-hez tartozó mátrixleképezés: $f : \begin{array}{ccc} K^n & \to & K^m \\ \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array}$

P3 H halmaz, $\mathcal{V}_K$ vektortér, $\mathcal{V}^H := \{\varphi : H \to \mathcal{V}$ leképezések$\}$.
Ekkor $\mathcal{V}^H$ vektortér a $(\varphi+\psi)(h) := \varphi(h)+\psi(h)$ és
$(\lambda\varphi)(h) := \lambda\cdot\varphi(h)$ műveletekkel.
$c \in H$-ra a $\varphi \mapsto \varphi(c)$ lin. lekép. $\mathcal{V}^H$-ból $\mathcal{V}$-be.

P4 $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{0}$-tartó egybevágóságai lin. transzformációk.

T **Előírhatósági tétel**

Legyenek $\mathcal{V}_K$, $\mathcal{W}_K$ vektorterek, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}_K$ bázis, $f : \mathcal{B} \to \mathcal{W}$ tetsz. leképezés. Ekkor $\exists!$ $\overline{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lin. lekép., hogy $\overline{f}\,|_{\mathcal{B}} = f$, azaz $\overline{f}(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b})$ $\forall \mathbf{b} \in \mathcal{B}$-re.

B !: $\mathbf{v} = \sum x_i \mathbf{b}_i$-re $\overline{f}(\mathbf{v}) = \sum x_i \overline{f}(\mathbf{b}_i) = \sum x_i f(\mathbf{b}_i)$ lehet csak.

$\exists$: Az $\overline{f}(\sum x_i \mathbf{b}_i) := \sum x_i f(\mathbf{b}_i)$ képlettel megadott $\overline{f}$ jól definiált, mert a $\mathcal{V}$ elemeinek előállítása $\mathcal{B}$-beliek lineáris kombinációjaként egyértelmű. Az $\overline{f}$ definíciójából $\overline{f}\,|_{\mathcal{B}} = f$ ✓

$\overline{f}$ lineáris: Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{u} = \sum x_i \mathbf{b}_i$, $\mathbf{v} = \sum y_i \mathbf{b}_i$.

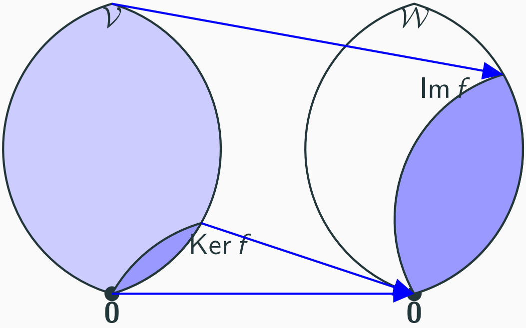
(Feltehető, hogy ugyanazok a $\mathbf{b}_i$-k szerepelnek: ami csak az egyikben van, azt a másikba 0 együtthatóval beírhatjuk.)

$\overline{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overline{f}(\sum_i (x_i + y_i)\mathbf{b}_i) = \sum_i (x_i + y_i) f(\mathbf{b}_i) =$
$\sum_i x_i f(\mathbf{b}_i) + \sum_i y_i f(\mathbf{b}_i) = \overline{f}(\mathbf{u}) + \overline{f}(\mathbf{v})$.

$\overline{f}(\lambda \mathbf{u}) = f(\sum_i \lambda x_i \mathbf{b}_i) = \sum_i \lambda x_i f(\mathbf{b}_i) = \lambda(\sum_i x_i f(\mathbf{b}_i)) = \lambda \overline{f}(\mathbf{u})$.

F Bizonyítsuk be, hogy $\exists f : \mathcal{P}(X)_{\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{Z}_2$ lineáris leképezés, amely
X $\forall$ páros elemszámú véges részhalmazát 0-ba,
Y $\forall$ páratlan elemszámú véges részhalmazát 1-be viszi.

D $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lin. leképezésre
$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \leqslant \mathcal{V}$ az f magtere,
$\operatorname{Im} f = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V}\} \leqslant \mathcal{W}$ az f képtere.



F Tekintsük az $f : K[x] \to K^2$, $p(x) \mapsto (p(1), p'(1))$ leképezést. Lineáris-e ez a leképezés? Mi a magtere és a képtere?

m Lineáris:
$f(p(x) + q(x)) = ((p + q)(1),\ (p + q)'(1)) = (p(1) + q(1),\ p'(1) + q'(1)) = (p(1), p'(1)) + (q(1), q'(1)) = f(p(x)) + f(q(x))$, és $f(cp(x)) = (cp(1), (cp)'(1)) = (cp(1), cp'(1)) = c(p(1), p'(1)) = cf(p(x))$.

$p(x) \in \operatorname{Ker} f \iff p(1) = 0$ és $p'(1) = 0 \iff$ az 1 legalább kétszeres gyöke p-nek $\iff p(x) = (x-1)^2 g(x)$ valamely $g(x) \in K[x]$ polinomra.

Tehát $\operatorname{Ker} f = \{(x-1)^2 g(x) \mid g(x) \in K[x]\}$.

$\operatorname{Im} f$ a teljes K^2, ui. tetsz. $(a, b) \in K^2$-re és $p(x) = a + b(x-1)$-re $f(p(x)) = (a, b)$.

D Tetsz. $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezésre

f injektív, ha $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

f szürjektív, ha $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}\ \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}$: $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

f bijektív, ha injektív és szürjektív.

Á Legyen $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés.

1) f szürjektív $\iff$ $\operatorname{Im} f = \mathcal{W}$.

2) f injektív $\iff$ $\operatorname{Ker} f = 0$. (Jelölés: $0 := \{\mathbf{0}\}$)

B 1) ✓ 2): $\Rightarrow$: $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\Leftarrow$: $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{0} = f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \Rightarrow$

$\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

F Egy $A \in K^{m \times n}$ mátrixra mikor inj., ill. szürj. az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ leképezés?

m injektív $\iff$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$-nak csak trivi. mo-a van $\iff$ A red. lépcsős alakjában minden oszlopban van vezéregyes $\iff$ $r(A) = n$.

szürjektív $\iff$ minden $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konzisztens $\iff$ A red. lépcsős alakjában minden sorban van vezéregyes $\iff$ $r(A) = m$.

D $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ izomorfizmus, ha lineáris és bijektív,
azaz lin., $\operatorname{Ker} f = 0$ és $\operatorname{Im} f = \mathcal{W}$.
$\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ izomorfak, ha $\exists f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ izomorfizmus. Jele: $\mathcal{V} \cong \mathcal{W}$.

L
1) Injektív f: ftln $\mapsto$ ftln.
2) Szürjektív f: genrsz $\mapsto$ genrsz.
3) Izomorfizmus: bázis $\mapsto$ bázis.

B 1): S ftln, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{s}_i) = \mathbf{0} \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i \in \operatorname{Ker} f = 0$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$, de S ftln $\Rightarrow \lambda_i = 0\ \forall i$.
2): S genrsz, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ tetszőleges. f szürj. $\Rightarrow \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}$: $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$.
$\mathbf{v}$ felírható S-ből: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i \Rightarrow$
$\mathbf{w} = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{s}_i) \in \operatorname{span}(f(S))$.
1)+2) $\Rightarrow$ 3).

Á Lin. lekép. inverze

0) Lin. leképezések kompozíciója lineáris. ✓
1) Ha $\mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{V} \xrightarrow{g} \mathcal{W}$ izomorfizmusok $\Rightarrow g \circ f$ is izomorfizmus.
2) Ha $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ izomorfizmus, akkor f-nek $\exists\ f^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ inverze (azaz $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{W}} : \mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}$ és $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{V}} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$), és f^{-1} is izomorfizmus.

B 1): $g \circ f$ lineáris ✓ Injektív: $g(f(\mathbf{u})) = \mathbf{0} \overset{g \text{ inj}}{\Rightarrow} f(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \overset{f \text{ inj}}{\Rightarrow} \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
Szürjektív: $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$-re $\exists \mathbf{v}$: $\mathbf{w} = g(\mathbf{v})$, és $\exists \mathbf{u}$: $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$,
mert f és g szürj. Így $\mathbf{w} = (g \circ f)(\mathbf{u})$.
2): Legyen $\mathcal{B}$ bázis $\mathcal{V}$-ben, ekkor $f(\mathcal{B})$ bázis $\mathcal{W}$-ben, mert f izo.
Az $f(\mathbf{b}) \mapsto \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathcal{B}$) lekép. kiterjeszthető $g : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezéssé a kiterjeszthetőségi tétel miatt.
$f \circ g$ és $g \circ f$ identikus leképezésként hat $f(\mathcal{B})$-n, ill. $\mathcal{B}$-n, így az egyértelműség miatt $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{W}}$ és $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$.
g inj., mert $f \circ g$ inj., és szürjektív, mert $g \circ f$ szürj.

K A vektorterek izomorfiája ekvivalenciareláció.

B Reflexív: $\mathrm{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ izomorfizmus. Szimmetrikus a tétel 2), tranzitív a tétel 1) állítása miatt.

T **Tétel**

Ha $\mathcal{V}_K$-nak van n elemű bázisa, akkor $\mathcal{V} \cong K^n$.

B Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ a $\mathcal{V}$ bázisa.

Ekkor a $K^n \to \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \mapsto \sum x_i \mathbf{b}_i$ leképezés nyilván lineáris, továbbá szürjektív, mert $\mathcal{B}$ genrsz, és injektív, mert $\mathcal{B}$ ftln.

Az inverz izomorfizmus a $k_{\mathcal{B}} : \mathcal{V} \to K^n$, $\sum x_i \mathbf{b}_i \mapsto \mathbf{x}$ koordinátázó leképezés.

T **Bázistétel**

Egy végesen generált vektortér bázisának elemszáma egyértelmű.

B Ha van véges genrsz, az leszűkíthető véges bázissá. Legyen a bázisok minimális elemszáma n, és $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis.
Az előző tételben láttuk, hogy $k_\mathcal{B} : \mathcal{V} \to K^n$ izomorfizmus, így $\mathcal{V}$ tetszőleges m elemű $\mathcal{C}$ bázisára (a feltevés szerint $m \geqslant n$) $k_\mathcal{B}(\mathcal{C})$ bázis K^n-ben.
De $k_\mathcal{B}$ injektivitása miatt $|k_\mathcal{B}(\mathcal{C})| = m$. Viszont K^n-ben nincs n-nél több független vektor (az ezekből mint oszlopokból álló mátrix rangja $\leqslant n$), így $m \leqslant n \leqslant m \Rightarrow m = n$.

D $\mathcal{V}$ dimenziója a $\mathcal{V}$ tetszőleges bázisának elemszáma. (Jele: $\dim \mathcal{V} = \dim_K \mathcal{V}$)

K Két véges dimenziós vektortér izomorf $\iff$ a dimenziójuk azonos.

B $\Rightarrow$: Izomorfizmus bázist bázisba visz.
$\Leftarrow$: Ha $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = n$, akkor $\mathcal{V} \cong K^n \cong \mathcal{W}$.

F Melyek izomorfak az alábbi $\mathbb{R}$ fölötti vektorterek közül?

a) 2×2-es valós felső Δ-mátrixok
b) az $x + y - 2z = 0$ sík vektorai
c) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$
d) $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$.

m A dimenziók: $3, 2, 2, 3$, tehát a) $\cong$ d), b) $\cong$ c).

MOSTANTÓL (ha mást nem mondunk) a vektorterek véges dimenziósak lesznek.

Mj A $\mathcal{V} \cong K^n$ izomorfiából következik, hogy minden olyan állítás igaz $\mathcal{V}$-re, amely K^n-re igaz, és csak vektortér-műveleteket használ.

Lineáris leképezések mátrixai

D **Lineáris leképezés mátrixa**

Legyen $f : \mathcal{V}_K \to \mathcal{W}_K$ lin. lekép., $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázis $\mathcal{V}$-ben, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$ bázis $\mathcal{W}$-ben.
$A \in K^{m\times n}$ az f mátrixa a $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bázispárra nézve (jele: $A = [f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$), ha $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$ $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Jelentése: a mátrixszal való balszorzás úgy hat a koordinátavektorokon, ahogy f az eredeti vektorokon:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "k_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "A\cdot"'] & K^m \end{tikzcd}$$

ahol $k_{\mathcal{B}} : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ és $k_{\mathcal{C}} : \mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}]_{\mathcal{C}}$ koordinátázó leképezések.
Az $A = [f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$-hez tartozó mátrixleképezés: $k_{\mathcal{C}} \circ f \circ k_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Á $[f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \mid \dots \mid [f(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}}]$.

B Ez a mátrix valóban jó: $\mathbf{v} = \sum x_i \mathbf{b}_i$-re (azaz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$-re)
$[[f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \mid \dots \mid [f(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}}]\,\mathbf{x} = \sum x_i [f(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{C}} = \sum x_i (k_{\mathcal{C}} \circ f)(\mathbf{b}_i) =$
$(k_C \circ f)\left(\sum x_i \mathbf{b}_i\right) = (k_C \circ f)(\mathbf{v}) = [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$.
Csak ez a mátrix jó: Az $A = [f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ i. oszlopa
$A\mathbf{e}_i = A[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{C}}$.

P Írjuk fel az $f : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 1} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, $p(x) \mapsto p'(x)$ lineáris leképezés mátrixát a következő bázispárokban:

a) $\{1,\ x\}$, $\{1,\ x,\ x^2\}$
b) $\{x+1,\ 2x+1\}$, $\{1, x, x^2\}$
c) $\{x+1,\ 2x+1\}$, $\{x^2-x,\ x+2,\ x^2+1\}$.

Mi a közös ezekben a mátrixokban?

m

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

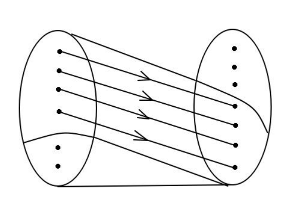
D **Leképezés rangja**

Egy f lineáris leképezés rangja $r(f) = \dim \operatorname{Im} f$.

T **Lineáris leképezés legegyszerűbb mátrixa**

Legyen $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ egy r rangú lin. leképezés. Ekkor $\exists$ $\mathcal{B}$ bázis $\mathcal{V}$-ben és $\mathcal{C}$ bázis $\mathcal{W}$-ben, hogy $[f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

B



Legyen $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ bázisa $\operatorname{Ker} f$-nek.

Ez kiegészíthető $\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_\ell$ elmekkel $\mathcal{V}$ bázisává:

$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_\ell, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$

Belátjuk, hogy $\{f(\mathbf{b}'_1), \ldots, f(\mathbf{b}'_\ell)\}$ bázisa $\operatorname{Im} f$-nek.

Ftln: $\mathbf{0} = \sum \lambda_i f(\mathbf{b}'_i) = f\left(\sum \lambda_i \mathbf{b}'_i\right) \Rightarrow \sum \lambda_i \mathbf{b}'_i \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow$
$\sum \lambda_i \mathbf{b}'_i = \sum \mu_j \mathbf{b}_j$ valamely μ_j-kkel. $\Rightarrow \lambda_i = \mu_j = 0 \ \forall i, j$, mert $\mathcal{B}$ ftln.
Genrsz: Tetsz. $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$-re $\mathbf{v} = \sum \lambda_i \mathbf{b}'_i + \sum \mu_j \mathbf{b}_j$ vmely λ_i, μ_j-kkel.
$\Rightarrow f(\mathbf{v}) = \sum \lambda_i f(\mathbf{b}'_i) + \sum \mu_j \mathbf{0} \in \operatorname{span}(f(\mathbf{b}'_1), \ldots, f(\mathbf{b}'_\ell))$.
Egészítsük ki ezt $\mathcal{W}$ bázisává: $\mathcal{C} = \{f(\mathbf{b}'_1), \ldots, f(\mathbf{b}'_\ell), \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_t\}$.
Ekkor $[f]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} I_\ell & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, és $\ell = \dim \operatorname{Im} f = r$.

T **Dimenziótétel**

$f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezésre

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{V}$$

B Az előző tétel bizonyításából:
$k = \dim \operatorname{Ker} f$, $\ell = \dim \operatorname{Im} f$, $k + \ell = \dim \mathcal{V}$.

F Tekintsük az $f : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$, $p(x) \mapsto (x-1)p'(x^2+1)$ lineáris leképezést. Mi ennek a magtere és mennyi a rangja? Adjuk meg a leképezés standard mátrixát (azaz a mátrixát a standard $\{1, x, x^2\}$, $\{1, x, x^2, x^3\}$ bázispárban).

Milyen bázispárban lesz a mátrixa $\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ alakú?

B $f(p(x)) = 0 \iff p'(x) = 0 \iff p(x)$ konstans.

Így $\operatorname{Ker} f = \operatorname{span}(1)$, és a dimenziótételből $r(f) = 3 - 1 = 2$.

$1 \mapsto 0$

$x \mapsto x - 1$

$x^2 \mapsto (x-1)2(x^2+1) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2.$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A tétel bizonyítását követve: $\operatorname{Ker} f$ bázisa 1, kiegészítése: x, x^2

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{x, x^2, 1\}$.

$\mathcal{C}$ a kiegészítő rész képe, kiegészítve bázissá:

$\mathcal{C} = \{x - 1,\ 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2,\ 1,\ x^2\}$.

Á Kompozíció mátrixa

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{U}} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{\mathcal{V}} \xrightarrow{g} \underset{\mathcal{D}}{\mathcal{W}} \implies [g \circ f]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}} \cdot [f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

B $[g]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}} \cdot [f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[f(\mathbf{u})]_{\mathcal{C}} = [g(f(\mathbf{u}))]_{\mathcal{D}} = [(g \circ f)]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$ minden **u**-ra, így a két mátrix egyenlő.

Mj Ha $\mathcal{V}$ két bázisa $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'$, akkor az áttérés $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ mátrixa (tehát amelyre $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$) az $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ mátrix, és $T^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$.

T **Áttérés másik bázispárra**

Legyen $\mathcal{V}$ két bázisa $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'$, és $P = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = [[\mathbf{b}'_1]_{\mathcal{B}} \mid \ldots]$,
$\mathcal{W}$ két bázisa $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}'$, és $Q = T_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}'} = [[\mathbf{c}'_1]_{\mathcal{C}} \mid \ldots]$,
továbbá az $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lin. lekép.-re $A = [f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, $A' = [f]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'}$.
Ekkor $A' = Q^{-1}AP$.

B $Q^{-1}AP = T^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = [\mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = A'$.

P Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ és $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezés. Vegyük a $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ és $\mathcal{C}' = \{(1,1),(2,1)\}$ bázispárt. $[f]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'} = ?$.

m $A = [f]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}$ (mind a két vektortérben $\mathcal{E}$-vel jelölve a standard bázist).

Az áttérés mátrixai $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. $[f]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'} = A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Ellenőrzés:

$(1,1,0) \mapsto (0,3) = 6(1,1) - 3(2,1)$ ✓

$(0,1,-1) \mapsto (-1,0) = 1(1,1) - 1(2,1)$ ✓

$(2,0,1) \mapsto (2,5) = 8(1,1) - 3(2,1)$ ✓

Á $A, B \in K^{m\times n}$ ugyanannak a lin. leképezésnek a mátrixai valamilyen bázispárokban

$$\Updownarrow$$

$\exists P \in K^{n\times n}$, $Q \in K^{m\times m}$ invertálható mátrixok, hogy $B = Q^{-1}AP$.

B $\Downarrow$: Láttuk. $\Uparrow$: Legyen $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezés, és P, illetve Q oszlopai az új báziselemek.

Á Ha A egy f lin. lekép. mátrixa tetszőleges bázispárban, akkor $r(A) = r(f)$, és $\dim \mathcal{N}(A) = \dim \operatorname{Ker} f$.

B Tudjuk, hogy f mátrixa valamely bázispárban $B = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. Ennek a rangja $r = r(f)$. Ehhez van P, Q invertálható, hogy $A = Q^{-1}BP$, azaz $B = QAP^{-1}$, így $r(A) \leqslant r(B)$ és $r(B) \leqslant r(A)$, amiből $r(A) = r(B) = r(f)$. A magterek dimenziója közötti összefüggés következik a dimenziótételből.

Mj A lin. leképezések mátrixai közötti összefüggést is felhasználhatjuk arra, hogy egy leképezés legegyszerűbb mátrixához megfelelő bázispárt találjunk.

A standard mátrixot elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra hozzuk, majd ezt elemi oszlopműveletekkel $B = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ alakra.

Ekkor $B = QAP$ valamely invertálható P, Q-ra, és itt az új báziselemek felírása a régiekből a P oszlopaiból, illetve a Q^{-1} oszlopaiból leolvasható.

F Végezzük ezt el a korábbi $p(x) \mapsto (x-1)p'(x^2+1)$ leképezésre!

F Lássuk be, hogy egy r rangú, $K^n \to K^m$ lineáris leképezésnek bármely r rangú $K^{m\times n}$-beli mátrix a mátrixa lehet alkalmas bázispárban.

m Legyen valamely $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bázispárban f mátrixa A, és szeretnénk egy $C \in K^{m\times n}$-et is megkapni f mátrixaként, ahol $r(C) = r$. Van olyan P_1, P_2 és Q_1, Q_2 invertálható, hogy $Q_1^{-1}AP_1 = B = Q_2^{-1}CP_2$ a fenti B mátrixra. Így $C = (Q_1Q_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})$ is mátrixa az f-nek.

Lineáris transzformációk mátrixa

D **Lineáris transzformáció mátrixa**

Legyen $\dim \mathcal{V}_K = n$. $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. transzformáció mátrixa $\mathcal{V}$ egy $\mathcal{B}$ bázisára nézve $[f]_{\mathcal{B}} := [f]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$, vagyis az az $A \in K^{n\times n}$ mátrix, amelyre

$$A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}\text{-re.}$$

A lineáris leképezésekre vonatkozó tételek speciális eseteként kapjuk:

Á $[f]_{\mathcal{B}} = [[f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \mid \ldots \mid [f(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}]$

T **Áttérés másik bázisra**

$\mathcal{V}$ két bázisa $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'$, és $P = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = [[\mathbf{b}'_1]_{\mathcal{B}} \mid \ldots]$ az áttérés mátrixa, továbbá $A = [f]_{\mathcal{B}}$, $A' = [f]_{\mathcal{B}'}$.
Ekkor $A' = P^{-1}AP$.

Á $A, B \in K^{n\times n}$ ugyanannak a lin. tr.-nak a mátrixai valamilyen bázisok szerint $\iff$ $\exists P \in K^{n\times n}$ invertálható, hogy $B = P^{-1}AP$.

D **Mátrixok hasonlósága**

$A, B \in K^{n\times n}$ mátrixok hasonlók (jele: $A \sim B$), ha $\exists P \in K^{n\times n}$ invertálható, hogy $B = P^{-1}AP$.

A $P^{-1}AP$ mátrixot az A mátrix P-vel vett konjugáltjának is hívjuk. A hasonlóságnál jelölhetjük a konjugáló mátrixot: $A \sim_P B$.

K A hasonlóság ekvivalenciareláció:

$A \sim_I A$,

$A \sim_P B \Rightarrow B \sim_{P^{-1}} A$,

$A \sim_P B$ és $B \sim_Q C \Rightarrow A \sim_{PQ} C$.

D $A \in K^{n\times n}$ nyoma: $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (tr: trace).

L Tetszőleges $A, B \in K^{n\times n}$ mátrixokra $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

B $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA)$.

T Ha $A, B \in K^{n\times n}$, és $A \sim B$, akkor

(1) $r(A) = r(B)$

(2) $\dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathcal{N}(B)$

(3) $\det A = \det B$

(4) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

B (1) következik a lineáris leképezések és mátrixaik rangjának egyenlőségéből

(2) következik az (1)-ből a dimenziótétel miatt.

(3): $B = P^{-1}AP \Rightarrow$
$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \frac{1}{|P|} \cdot |A| \cdot |P| = |A|$.

(4): $B = P^{-1}AP \Rightarrow \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} P^{-1}AP \overset{L}{=} \operatorname{tr}(AP)P^{-1} = \operatorname{tr} A$.

P (1)–(4) sem biztosítja, hogy a mátrixok hasonlók legyenek. Pl.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$-re igaz (1)–(4), de minden P-re
$P^{-1}AP = P^{-1}IP = P^{-1}P = I \neq B$.

F Melyek hasonlók a következő mátrixok közül?

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$$

m

tr	1	3	0	2	2	3
det	0	2	-2	0	1	2
rang	1	2	2	1	2	2

$A = \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$ hasonlók?

$P = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ =? hogy $P^{-1}AP = B$, azaz $AP = PB$ és P inv.-ható

$\begin{bmatrix}a&b\\2c&2d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2a&a+b\\2c&c+d\end{bmatrix} \iff a = 0,\ c = d$. Pl. $b = c = d = 1$,

$a = 0$ esetén invertálható is. $P = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ megfelel.

Direkt összeg és vetítés

D **Alterek direkt összege**

$\mathcal{U}_i \leqslant \mathcal{V}$ $(i \in I)$ (dim $\mathcal{V}$ és I is lehet ∞)

Alterek összege:

$$\sum_{i\in I} \mathcal{U}_i = \left\{ \sum_{i\in I} \mathbf{u}_i \mid \mathbf{u}_i \in \mathcal{U}_i \ \forall i, \text{ csak véges sok tag } \neq \mathbf{0} \right\} \leqslant \mathcal{V}.$$

Alterek direkt összege (belső direkt összeg):

$\mathcal{V} = \oplus_{i\in I} \mathcal{U}_i$, ha $\mathcal{V} = \sum_{i\in I} \mathcal{U}_i$ és $\forall i$-re $\mathcal{U}_i \cap \sum_{j\neq i} \mathcal{U}_j = 0$.

P Az $\mathcal{U}_i \cap \sum_{j\neq i} \mathcal{U}_j = 0$ feltétel teljesüléséhez nem elég azt biztosítani, hogy az alterek páronként legyenek "diszjunktak", azaz hogy $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = 0$ minden $i \neq j$-re. Pl. $\mathbb{R}^2$-ben három origón átmenő nem párhuzamos egyenes páronként diszjunkt, de bármelyik benne van a másik kettő generátumában (azaz $\mathbb{R}^2$-ben).

T **A direkt összeg ekvivalensei**

Legyen $\mathcal{U}_i \leqslant \mathcal{V}$ $(i \in I)$. Ekvivalens:

(i) $\mathcal{V} = \oplus_{i\in I}\mathcal{U}_i$

(ii) Ha $\mathcal{B}_i$ bázisa $\mathcal{U}_i$-nek minden i-re, akkor $\mathcal{B} = \dot\cup_{i\in I}\mathcal{B}_i$ bázisa $\mathcal{V}$-nek. ($\dot\cup$: a diszjunkt unió)

(iii) Van olyan $\mathcal{B}_i$ bázisa minden $\mathcal{U}_i$-nek, hogy $\mathcal{B} = \dot\cup_{i\in I}\mathcal{B}_i$ bázisa $\mathcal{V}$-nek

(iv) $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ egyértelműen felírható $\sum_{i\in I} \mathbf{u}_i$ alakban ($\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}_i$, véges sok $\neq \mathbf{0}$)

B $(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathcal{B})$, mert minden $\mathbf{v}$ felírható mint $\sum \mathbf{u}_i$, és $\mathbf{u}_i \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_i)$

$\mathcal{B}$ ftln, mert ha egy lineáris kombinációja $\mathbf{0}$, és szerepel benne egy $\mathbf{0} \neq \lambda\mathbf{b} \in \mathcal{B}_i \Rightarrow$ a $\mathcal{B}_i$-beli tagok lin. komb.-ja $\neq \mathbf{0}$, és kifejezhető a többiből $\lightning \mathcal{U}_i \cap \sum_{j\neq i} \mathcal{U}_j = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: ✓

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Felírható: $\mathbf{v} \in \operatorname{span}(\mathcal{B}) = \operatorname{span}(\cup \mathcal{B}_i)$, és csoportosíthatók a tagok i szerint.

Egyértelmű: elég, hogy a $\mathbf{0}$ felírása egyértelmű.

$\sum \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \sum \lambda_{ij} \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{0} \Rightarrow \forall \lambda_{ij} = 0 \Rightarrow \forall \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: $\mathcal{V} = \sum \mathcal{U}_i$ ✓

$\mathcal{U}_i \cap \sum_{j \neq i} \mathcal{U}_j = 0$: $\mathbf{u}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{u}_j$ esetén az egyértelmű felírás miatt $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$.

D Külső direkt összeg:

Ha $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ vektorterek K fölött, akkor az $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ Descartes-szorzat is vektortér a komponensenkénti műveletekkel:

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) := (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$ és $\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := (\lambda \mathbf{u}, \lambda \mathbf{w})$, és ez az $\mathcal{U}$-val izomorf $\mathcal{U} \times \{\mathbf{0}\}$ és a $\mathcal{W}$-vel izomorf $\{\mathbf{0}\} \times \mathcal{W}$ alterek belső direkt összege.

Ez is általánosítható végtelen sok vektortérre, de ott a Descartes-szorzatnak csak azok az elemei szerepelnek, amelyeknek csak véges sok komponense nem nulla. Ezt is $\oplus$-gel jelöljük.

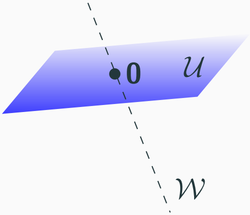
D Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor $\mathcal{W}$ direkt kiegészítője $\mathcal{U}$-nak (és $\mathcal{U}$ a $\mathcal{W}$-nek).

T **Direkt kiegészítő létezése**

$\forall \mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}\ \exists \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, hogy $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

B $\forall$ ftln halmaz kiegészíthető bázissá. Ha $\mathcal{U}$ bázisa $\mathcal{B}_1$, akkor $\mathcal{V}$-nek van $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot\cup \mathcal{B}_2$ bázisa, és $\mathcal{W} = \operatorname{span}(\mathcal{B}_2)$ megfelel a direkt összeges tétel (iii) állítása miatt.

P



$\mathbb{R}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$

$\mathbf{0}$-t tartalmazó sík direkt kiegészítője $\mathbb{R}^3$-ben minden $\mathbf{0}$-n átmenő, nem a síkban fekvő egyenes.

D **Vetítés**

Legyen $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

$\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \mapsto \mathbf{u}$ $(\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W})$

az $\mathcal{U}$ altérre való vetítés a $\mathcal{W}$ altér mentén (vagy $\mathcal{W}$ irányú vetítés $\mathcal{U}$-ra).

Ez jól definiált, mert az $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ alakban való felírás egyértelmű.

Lineáris: $\pi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \pi((\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2)) =$
$\pi((\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \pi(\mathbf{v}_1) + \pi(\mathbf{v}_2)$,
és $\pi(\lambda\mathbf{v}) = \pi(\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{w})) = \pi(\lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{u} = \lambda\pi(\mathbf{v})$.

T $\mathcal{V}$ véges dim. vektortér, $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. tr. Ekvivalens:

(i) f valamely altérre való vetítés;

(ii) f valamely bázis szerinti mátrixa $\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ alakú;

(iii) f valamely/bármely mátrixára $A^2 = A$;

(iv) $f \circ f = f$.

B *(i) ⇒ (ii)*: Ha f a $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ felbontáshoz tartozó vetítés $\mathcal{U}$-ra, $\mathcal{B}$ az $\mathcal{U}$, $\mathcal{C}$ a $\mathcal{W}$ bázisa, akkor a $\mathcal{V}$ $\mathcal{D} = \mathcal{B} \dot\cup \mathcal{C}$ bázisára $[f]_\mathcal{B} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, mert $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ és $f(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ $\forall\, \mathbf{b} \in \mathcal{B}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$.

(ii) ⇒ (iii): Ha $B := [f]_\mathcal{B}$ a fenti diagonális mátrix, $B^2 = B$, és f tetszőleges másik bázisban felírt mátrixa $A = P^{-1}BP$ alakú, így $A^2 = P^{-1}BPP^{-1}BP = P^{-1}B^2P = P^{-1}BP = A$.

(iii) ⇒ (iv): Ha A a $\mathcal{B}$-beli mátrix, akkor $[f \circ f]_\mathcal{B} = [f]_\mathcal{B} \cdot [f]_\mathcal{B} = [f]_\mathcal{B}$ $\Rightarrow (f \circ f)(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b})$ $\forall\, \mathbf{b} \in \mathcal{B}$-re $\Rightarrow f \circ f = f$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Legyen $\mathcal{U} = \operatorname{Im} f$, $\mathcal{W} = \operatorname{Ker} f$.

Ekkor $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 0$, ui. $\mathbf{u} \in \operatorname{Im} f$-re $\exists \mathbf{v}$: $\mathbf{u} = f(\mathbf{v})$, és ha emellett $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} f$, akkor $\mathbf{0} = f(\mathbf{u}) = f(f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$.

$\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$, ui. $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$-re $f(\mathbf{v} - f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) - f(f(\mathbf{v})) = \mathbf{0} \Rightarrow$ $\mathbf{v} - f(\mathbf{v}) \in \operatorname{Ker} f$ és $f(\mathbf{v}) \in \operatorname{Im}(f)$, így $\mathbf{v} \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f)$.

Tehát $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

f az $\mathcal{U}$-ra való vetítés $\mathcal{W}$ mentén, ui. ha $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, akkor $\mathbf{u} = f(\mathbf{v}_1)$ valamely $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}$-re, és

$f(\mathbf{v}) = f(f(\mathbf{v}_1) + \mathbf{w}) = f(f(\mathbf{v}_1)) + f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}_1) + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.

Vegyük észre: Minden mátrix $\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ alakra hozható lineáris leképezésként (amikor a két oldalon akárhogy változtathatjuk a bázist), de transzformációként csak a vetítések.

K1 Minden vetítésnek van diagonális mátrixa.

K2 Ha $A^2 = A$, akkor van A-hoz hasonló diagonális mátrix (azaz A diagonalizálható).