Bevezetés az algebrába 2

Sajátértékek, sajátvektorok, diagonalizálás

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Sajátértékek és sajátvektorok

Motiváció:

Hasznos ismerni egy transzformáció (akár mátrixleképezés) diagonális mátrixát, ha van, mert pl.

- jobban megmutatja, hogy hat a transzformáció,
- megmutatja a mátrixok hasonlóságát,
- diagonális mátrixokkal könnyebb számolni, pl. hatványozni.

Mikor diagonális egy $[f]_{\mathcal{B}}$ mátrix?

Ha $f(\mathbf{b}_i) = \lambda_i \mathbf{b}_i$ minden $\mathbf{b}_i$ báziselemre valamely λ_i skalárral, azaz ha a transzformáció a báziselemeket "lényegében önmagába " viszi (a vektor által generált egyenest önmagába képezi).

Nem minden transzformációnak létezik diagonális mátrixa, pl. a sík origó körüli 90°-os forgatásának sincs.

D **Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke**

Legyen $\mathcal{V}_K$ vektortér, $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. tr.

$\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ sajátvektora f-nek, ha $f(\mathbf{v}) \parallel \mathbf{v}$, azaz $\exists \lambda \in K$: $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

Ekkor λ a $\mathbf{v}$-hez tartozó sajátérték.

P $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$-re a $\mathcal{W}$ irányú, $\mathcal{U}$-ra való vetítés sajátvektorai:

$\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathcal{U} \qquad \lambda = 1$-gyel,

$\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in \mathcal{W} \qquad \lambda = 0$-val. $\qquad (\mathbf{0} \parallel \mathbf{w})$

Más nincs: ha $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, akkor $\pi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, és $\mathbf{u} \neq \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{w}$ semelyik λ-ra, mert $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ ftln.

D $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. tr., λ sajátértéke f-nek. Ekkor

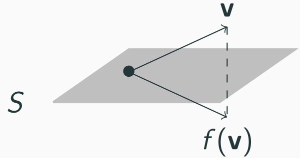
$\mathcal{V}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\} = \{\lambda \text{ s.é.-ű s.vektorok}\} \cup \{\mathbf{0}\} \leqslant \mathcal{V}$

az f λ-hoz tartozó sajátaltere.

(Ellenőrizzük, hogy $\mathcal{V}_\lambda$ valóban altér!)

P1 Az előző példában a $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ felbontás szerint az $\mathcal{U}$-ra való vetítés sajátalterei: $\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}$ és $\mathcal{V}_0 = \mathcal{W}$.

P2 $\mathbb{R}^3$-ben egy (origón átmenő) síkra való tükrözés sajátalterei:



$\mathcal{V}_1$ az S sík
$\mathcal{V}_{-1} = \mathrm{span}(\mathbf{n})$,
ahol $\mathbf{n}$ a sík normálvektora

P3 $\mathbb{R}^3$-ben a z tengely körüli $90°$-os forgatás:
Csak a z-vel párhuzamos $\neq \mathbf{0}$ vektorok s.vektorok, $\lambda = 1$ s.é.-kel.

F Mik a sajátértékei és sajátalterei az alábbi transzformációknak?
a) $x + y + z = 0$ síkra való vetítés a z tengely irányában
b) $K[x]_{\leqslant 2} \to K[x]_{\leqslant 2}$, $p(x) \mapsto (x-1)p'(x)$.

m a): $\mathcal{V}_1$: a sík vektorai, $\mathcal{V}_0 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$. Más sajátérték nincs.
b) Nyilván s.vektorok lesznek az $x - 1$ hatványainak (nemnulla) skalárszorosai: c a $\lambda = 0$-hoz, $c(x-1)$ a $\lambda = 1$-hez, $c(x-1)^2$ a $\lambda = 2$-höz tartozik. Van-e más? Visszatérünk rá.

T Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ különböző sajátértékei az $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. transzformációnak. Ekkor

$$\mathcal{V}_{\lambda_1} + \ldots + \mathcal{V}_{\lambda_k} = \mathcal{V}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_{\lambda_k}$$

B Azt kell belátni, hogy $\forall\, i$-re $\mathcal{V}_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} \mathcal{V}_{\lambda_j} = 0$. Tfh ez nem igaz.

Legyen t minimális, amelyre $\exists\ i$ és $j_1, \ldots, j_t$ különbözők, hogy

$$\exists\, \mathbf{v}_i = \sum_{s=1}^{t} \mathbf{v}_{j_s}, \quad (*) \ \text{ ahol } \mathbf{0} \neq \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_{\lambda_i},\ \mathbf{0} \neq \mathbf{v}_{j_s} \in \mathcal{V}_{\lambda_{j_s}}. \quad \text{Így}$$

$$\lambda_i \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_{j_1} + \ldots + \lambda_i \mathbf{v}_{j_t} \qquad \lambda_i \cdot (*)$$

$$\lambda_i \mathbf{v}_i = \lambda_{j_1} \mathbf{v}_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_t} \mathbf{v}_{j_t} \qquad f(*)$$

$$\mathbf{0} = (\lambda_i - \lambda_{j_1})\mathbf{v}_{j_1} + \ldots + (\lambda_i - \lambda_{j_t})\mathbf{v}_{j_t}$$

Így $\mathbf{0} \neq (\lambda_i - \lambda_{j_1})\mathbf{v}_{j_1} \in \mathcal{V}_{j_2} + \ldots + \mathcal{V}_{j_t}$, ellentmondva t minimalitásának. $\lightning$

T Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az f lin. tr. különböző sajátértékei. Ekkor
$\sum\limits_{i=1}^{k} \dim \mathcal{V}_{\lambda_i} \leqslant \dim \mathcal{V}$, és
itt $=$ van $\iff$ f mátrixa valamely bázisban diagonális.

B Az előző tétel szerint $\oplus \mathcal{V}_{\lambda_i} = \sum \mathcal{V}_{\lambda_i} \leqslant \mathcal{V}$, másrészt
$\dim \oplus \mathcal{V}_{\lambda_i} = \sum \dim \mathcal{V}_{\lambda_i}$ a direkt összeg bázisos jellemzéséből, így
$\sum\limits_{i=1}^{k} \dim \mathcal{V}_{\lambda_i} \leqslant \dim \mathcal{V}$.
$\Rightarrow$: Ha $=$ van $\Rightarrow \oplus \mathcal{V}_{\lambda_i} = \mathcal{V}$. Legyen $\mathcal{B}_i$ a $\mathcal{V}_{\lambda_i}$ egy bázisa $\forall i$-re, és
$\mathcal{B} = \dot{\cup}\, \mathcal{B}_i$ (a sorrendet is tartva).
Ekkor $[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k)$ diagonális.
$\Leftarrow$: Ha f valamely bázisban diagonális: $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \Rightarrow$
$f(\mathbf{b}_i) = d_i \mathbf{b}_i \ \forall i$, így minden d_i sajátérték.
Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az f összes különböző s.értéke, és a d_j-k között n_i
darab egyenlő λ_i-vel, akkor
$\dim \mathcal{V} = \sum n_i \leqslant \sum \dim \mathcal{V}_{\lambda_i} \leqslant \dim \mathcal{V}$, tehát $\sum \dim \mathcal{V}_{\lambda_i} = \dim \mathcal{V}$.

K Ha $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$, és f-nek n darab különböző s.értéke van $\Rightarrow$ f-nek van diag. mátrixa.

B $\forall\, \lambda$ s.értékre $\dim \mathcal{V}_\lambda \geqslant 1$, így $\sum \dim \mathcal{V}_{\lambda_i} \geqslant n$, másrészt $\leqslant n$, tehát $= n$.

P Az $f : K[x]_{\leqslant 2} \to K[x]_{\leqslant 2}$, $p(x) \mapsto (x-1)p'(x)$ transzformációnál láttuk, hogy $0, 1, 2$ sajátértékek.

Mivel $\dim \mathcal{V}_\lambda \geqslant 1$ minden λ sajátértékre, a $\sum \dim \mathcal{V}_{\lambda_i} \leqslant \dim \mathcal{V}$ összefüggés miatt nem lehet több s.érték, és mindegyik sajátaltér csupán 1-dimenziós, tehát a felsoroltakon kívül nincs más sajátvektor.

A $\mathcal{B} = \{1,\ x-1,\ (x-1)^2\}$ bázisban $[f]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

D **Mátrix sajátvektora és sajátértéke**

$A \in K^{n\times n}$ sajátértékei és sajátvektorai a $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ mátrixleképezés sajátértékei és sajátvektorai, azaz

$\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in K^n$ sajátvektor $\lambda \in K$ sajátértékkel, ha $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

F Lássuk be, hogy 0 sajátértéke A-nak $\iff$ $|A| = 0$.

Hogyan találjuk meg egy mátrix sajátvektorait és sajátértékeit?

$$\begin{aligned}\lambda \text{ sajátérték} &\iff \exists\, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} : \ A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ &\iff \exists\, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} : \ (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{(homogén lin. er.)} \\ &\iff r(A - \lambda I) < n \\ &\iff |A - \lambda I| = 0\end{aligned}$$

D **Karakterisztikus polinom**

$k_A(x) = |A - xI|$ polinom az A mátrix karakterisztikus polinomja.

$$|A - xI| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

$\forall$ kifejtési tag $\leqslant$ n-edfokú polinom, de csak a főátlóbeli elemek szorzata n-edfokú, a többi kisebb. Tehát $\deg k_A(x) = n$, és a főtagja $(-1)^n x^n$.

Á A sajátértékei pontosan a $k_A(x)$ polinom gyökei K-ban. λ sajátértékhez tartozó sajátaltér $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

B Ld. az előző oldal tetején.

Á Ha $f : \mathcal{V}_K \to \mathcal{V}_K$ valamelyik mátrixa $[f]_\mathcal{B} = A$, akkor f sajátértékei az A mátrix K-beli sajátértékei, és az f sajátaltereit a $k_\mathcal{B}$ koordinátázó leképezés izomorfan képezi A sajátaltereire.

B $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \iff [f(\mathbf{v})]_\mathcal{B} = \lambda[(\mathbf{v})]_\mathcal{B} \iff A[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \lambda[\mathbf{v}]_\mathcal{B} \iff$ $Ak_\mathcal{B}(\mathbf{v}) = \lambda k_\mathcal{B}(\mathbf{v})$, és $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \iff k_\mathcal{B}(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$.

P A $K[x]_{\leqslant 2}$ tér $p(x) \mapsto (x-1)p'(x)$ transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait megkereshetjük az $\{1, x, x^2\}$-ben felírt

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixának segítségével is.

$$k_A(x) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 0 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = -x(x-1)(x-2).$$

$\lambda = 0$-ra:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p(x) = t \cdot 1$$

$\lambda = 1$-re:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$p(x) = t(x-1)$$

$\lambda = 2$-re:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$p(x) = t(x^2 - 2x + 1)$$

F Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit és a sajátalterek egy-egy bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

m $|A - xI| = \begin{vmatrix} 3-x & 6 & 1 \\ 1 & 8-x & 1 \\ 1 & 6 & 3-x \end{vmatrix} = -(x-2)^2(x-10).$ Sajátalterek?

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = s\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 10I = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{V}_2$ bázisa $\{(-6,1,0),(-1,0,1)\}$, $\mathcal{V}_{10}$ bázisa $\{(1,1,1)\}$.

Diagonalizálhatóság

D $A \in K^{n\times n}$ diagonalizálható K fölött, ha A hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha $\exists\, P \in K^{n\times n}$ invertálható mátrix, hogy $P^{-1}AP$ diagonális.

P $\mathbb{R}^2$-en az origó körüli 90°-os forgatás mátrixa $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött (nincs is valós sajátértéke, ui. $k_A(x) = x^2 + 1$-nek nincs valós gyöke), de $\mathbb{C}$ fölött igen.

Ha komplex mátrixnak tekintjük:

Sajátértékei $\pm i$, és a sajátvektorok:

$\lambda = i$-hez: $\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -i$-hez: $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$-re $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

D Egy $A \in K^{n\times n}$ mátrix λ sajátértékének

algebrai multiplicitása a karakt. poli.-ban a λ gyök multiplicitása,

geometriai multiplicitása a λ-hoz tartozó $\mathcal{V}_\lambda$ sajátaltér dimenziója.

Á Mátrixok további invariánsai

Legyen $A, B \in K^{n\times n}$, $A \sim B$. Ekkor A-ra és B-re megegyeznek:

1) karakterisztikus polinom
2) sajátértékek halmaza (spektrum)
3) sajátértékek algebrai multiplicitása
4) sajátértékek geometriai multiplicitása

B 1): $B = P^{-1}AP \Rightarrow$

$k_B(x) = |B - xI| = |P^{-1}AP - xI| = |P^{-1}AP - P^{-1}xIP| =$
$|P^{-1}(A - xI)P| = \frac{1}{|P|} \cdot |A - xI| \cdot |P| = |A - xI| = k_A(x)$.

2), 3) az 1)-ből

4): $B - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$ nulltere $\mathcal{N}(A - \lambda I)$-nek a $P^{-1}\cdot$ izomorfizmusnál vett képe, így ugyanannyi dimenziósak.

K Ezek az invariánsok értelmezve vannak lin. tr.-ra is.

Á Legyen $k_A(x) = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. Ekkor

1) $\operatorname{tr} A = (-1)^{n-1} c_{n-1}$

2) $\det A = c_0$

És ha $k_A(x)$

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$$

alakban írható, akkor

1') $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$

2') $\det A = \prod \lambda_i$

B

1) $\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \ldots & & a_{nn} - x \end{vmatrix}$-ban x^{n-1} eh-ja $= ?$

Csak abban a kifejtési tagban szerepelhet x^{n-1}, ahol $\geqslant n-1$ sorból a diag. elemet választottuk, így mindegyikből azt, tehát x^{n-1} eh-ja $k_A(x)$-ben ugyanaz, mint $(a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x)$-ben, ami $c_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$. Tehát $\operatorname{tr} A = (-1)^{n-1} c_{n-1}$.

2) $k_A(x)$-be $x = 0$-t helyettesítve: $c_0 = |A - 0I| = |A|$.

1'), 2') következik a Viète-formulákból.

Á Egy sajátérték geom. multiplicitása $\leqslant$ az alg. multiplicitásánál, azaz legföljebb annyi független sajátvektor lehet λ-hoz, ahányszoros gyöke a λ a kar. pol.-nak.

B $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, λ s.é. geom. multiplicitása k.

Legyen $\mathcal{B}' = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ a $\mathcal{V}_\lambda$ sajátaltér bázisa, és egészítsük ki ezt $\mathcal{V}$ bázisává: $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Ekkor

$$A := [f]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I & * \\ \hline 0 & A' \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$k_A(x) = \det \left[\begin{array}{c|c} (\lambda - x)I & * \\ \hline 0 & A' - xI \end{array}\right] = (\lambda - x)^k |A' - xI|,$$

tehát $(\lambda - x)^k \mid k_A(x) \Rightarrow \lambda$ algebrai multiplicitása legalább k.

T **Diagonalizálhatóság feltétele multiplicitásokkal**

Legyen $f : \mathcal{V}_K \to \mathcal{V}_K$ lineáris transzformáció.

$$f\text{-nek van diag. mátrixa} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \text{a kar. pol. lineáris faktorokra} \\ & \text{bontható } K[x]\text{-ben} \\ 2) & \forall \text{ s.é. alg. és geom.} \\ & \text{multiplicitása megegyezik.} \end{cases}$$

B Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az f különböző s.é.-ei., $\dim \mathcal{V} = n$, és $\dim \mathcal{V}_{\lambda_i} = n_i$ a λ_i geom. multiplicitása.

$\Rightarrow$: f-nek van diag. mátrixa $\Rightarrow \sum n_i = n$.

Ha $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}_{\lambda_i}$ bázisainak az uniója, akkor $A := [f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1 I, \ldots, \lambda_k I)$
$\Rightarrow k_A(x) = \prod(\lambda_i - x)^{n_i}$.

Tehát $k_A[x]$ lineáris faktorokra bomlik, és λ_i alg. multiplicitása is n_i.

$\Leftarrow$: Legyen A az f mátrixa valamely bázisban.

Ekkor 1) miatt $k_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{k_i}$. Itt $\sum k_i = n$.

Másrészt a 2) miatt $\sum k_i = \sum n_i$, tehát $\sum n_i = n \Rightarrow f$-nek $\exists$ diag. mátrixa.

Mj Az előző tétel egyúttal a mátrixok diagonalizálhatóságának a feltételét is megadja.

Mj A 2) feltételhez elég azt ellenőrizni, hogy $k_A(x)$ többszörös gyökeihez van annyi ftln sajátvektor, amennyi a gyök multiplicitása.

P Diagonalizálhatók-e a következő mátrixok $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ fölött? Ha igen, mi a diagonális alak? Valamelyik diagonalizálhatóhoz adjuk meg a konjugáló mátrixot is!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

m $k_A(x) = -x(x-1)(x-2) \Rightarrow$ 1) teljesül $\mathbb{R}$ fölött is, továbbá mivel minden gyök egyszeres, a 2) is teljesül,

Így A diagonalizálható, és a diagonális alak $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$k_B(x) = (x-1)^2 \Rightarrow \lambda = 1$ az egyetlen sajátérték.

$A - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ rangja 1 $\Rightarrow \dim V_1 = 2 - 1 = 1 < 2$

$\Rightarrow B$ nem diagonalizálható ($\mathbb{C}$ fölött sem).

$k_C(x) = -x(x^2+1) = -x(x-i)(x+i)$. $\Rightarrow$

$\mathbb{R}$ fölött nem diagonalizálható, de $\mathbb{C}$ fölött igen, mert minden sajátérték egyszeres. Tehát $C \sim \operatorname{diag}(0, i, -i)$ $\mathbb{C}^{3\times3}$-ban.

Feltűnhet, hogy $M + I = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ rangja 1, tehát -1 legalább kétszeres gyöke $k_M(x)$-nek, és $\operatorname{tr} M = 0$ miatt a harmadik gyök 2.

Mivel -1 geom. multiplicitása megegyezik az alg. mutliplicitásával, M diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött.

Keressük meg M-hez a konjugáló mátrixot!

$\lambda = -1$-hez sajátaltér:

$$M + I = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$-höz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ahol $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

K Ha $A, B \in K^{n\times n}$ diagonalizálható mátrixok, akkor

$$A \sim B \iff k_A(x) = k_B(x).$$

B $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Mivel diagonalizálhatók, K^n mindkét mátrixra a sajátalterek direkt összege. Továbbá az algebrai multiplicitások megegyeznek a geometriaiakkal, tehát a sajátalterek azonos dimenziósak. Ha mindkettőnél ugyanabban a sorrendben rakjuk össze a sajátalterekből a K^n $\mathcal{A}$, illetve $\mathcal{B}$ bázisát, akkor a P, illetve Q áttérési mátrixszal $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$, azaz $B = (PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})$.

P Lássuk be, hogy az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok hasonlók. Adjunk is meg átkonjugáló mátrixot.

m $k_A(x) = k_B(x) = (x-1)(x-2)$, minden gyök egyszeres, tehát diagonalizálhatók. $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(1, 2)$, ha $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Így $T = PQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$-mal $A \sim_T B$.

A diagonalizálás alkalmazásai

Mátrix hatványozása

Tfh $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ diagonális.

Ekkor $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$.

F Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix n-edik hatványát!

m $k_A(x) = (x-1)(x-2)$, sajátértékek $1, 2$, sajátalterek $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span}((1,0))$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}((-1,1))$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

Sajátfelbontás

Az $\mathbf{y}^T$ sorvektor az $A \in K^{n\times n}$ mátrix bal oldali sajátvektora, ha nem nulla, és $\mathbf{y}^T A = \lambda \mathbf{y}^T$ valamely $\lambda \in K$-ra.

Nyilván:

A bal sajátvektorai $=$ A^T sajátvektorai

A bal spektruma $=$ A^T spektruma $=$ A spektruma

$$(k_{A^T}(x) = |A^T - xI| = |(A - xI)^T| = |A - xI| = k_A(x).)$$

T Tfh $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ekkor

(1) P oszlopai (legyenek ezek $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$) az A sajátvektorai $\lambda_1, \dots, \lambda_n$-hez ebben a sorrendben.

(2) P^{-1} sorai (legyenek $\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_n^T$) az A bal oldali sajátvektorai $\lambda_1, \dots, \lambda_n$-hez ebben a sorrendben.

(3) $A = PDP^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T$.

D A (3) pontbeli PDP^{-1} az A mátrix sajátfelbontása, a $\sum \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T$ felbontás pedig a sajátfelbontás diadikus alakja.

B (1): Tudjuk.

(2): $$P^{-1}A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1},$$

és ebben az i. sor: $\mathbf{y}_i^T A = [0 \dots \lambda_i \, 0 \dots] P^{-1} = \lambda_i \mathbf{y}_i^T$.

(3) $$A = PDP^{-1} = [\mathbf{x}_1 \mid \dots \mid \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{y}_n \end{bmatrix} =$$

$$[\lambda_1 \mathbf{x}_1 \mid \dots \mid \lambda_n \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{y}_n^T \end{bmatrix} = \sum \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T$$

F Írjuk fel a korábbi feladatban diagonalizált M mátrix sajátfelbontásának diadikus alakját!

m $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad A = PDP^{-1} =$

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mj A sajátfelbontás nem egyértelmű, sőt, ha vannak többszörös sajátértékek, akkor a diadikus alakja sem.

Mj A diadikus alakból is leolvashatók a jobb és bal sajátalterek bázisai.

Spektrálfelbontás

Tfh A diagonalizálható, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ az összes különböző sajátértéke,

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1 I} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k I} \end{bmatrix}$$ a diag. alakja, és P az áttérés mátrixa.

Bontsuk fel P-t és P^{-1}-et ugyanilyen széles, illetve magas sávokra:

$$P = [X_1 \mid \dots \mid X_k] \text{ és } P^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \hline \vdots \\ \hline Y_k \end{bmatrix}.$$

Ekkor X_i oszlopai a $\mathcal{V}_{\lambda_i}$ bázisát, Y_i sorai a λ_i-hez tartozó bal oldali sajátaltér bázisát adják, ugyanis benne vannak a megfelelő sajátalterekben, P és P^{-1} invertálhatósága miatt ftln-ek, és $\dim \mathcal{S}(Y_i) = \lambda_i$ alg. multiplicitása $= \dim \mathcal{O}(X_i)$ miatt generálják is a megfelelő sajátalteret.

Legyen $P_i := X_i Y_i$.

T **Spektrálfelbontás**

Ha A diagonalizálható, akkor az előbb definiált λ_i, X_i, Y_i, P_i-kre

(1) $P_1 + \ldots + P_k = I$

(2) $P_i P_j = \begin{cases} P_i, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

(3) P_i a $K^n = \mathcal{V}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_{\lambda_k}$ felbontás szerinti vetítés mátrixa a $\mathcal{V}_{\lambda_i}$ sajátaltérre, azaz ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_{\lambda_j}$ $\forall j$, akkor $P\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$.

(4) $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k$.

B (1): $I = PP^{-1} = [X_1 \mid \ldots \mid X_k] \left[\begin{array}{c} Y_1 \\ \hline \vdots \\ \hline Y_k \end{array}\right] = \sum X_i Y_i = \sum P_i$.

(2): $I = P^{-1}P = \left[\begin{array}{c} Y_1 \\ \hline \vdots \\ \hline Y_k \end{array}\right] [X_1 \mid \dots \mid X_k] = \left[\begin{array}{c|c|c} Y_1X_1 & Y_1X_2 & \dots \\ \hline Y_2X_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \hline Y_kX_1 & \dots & Y_kX_k \end{array}\right]$

$\Rightarrow Y_iX_j = \begin{cases} I, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

Így $P_iP_j = X_iY_iX_jY_j = \begin{cases} X_iIY_i = X_iY_i = P_i, & \text{ha } i = j \\ X_i0Y_j = 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$.

(3): Legyen $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i$, ahol $\forall i$: $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_{\lambda_i} = \mathcal{O}(X_i)$, azaz $\exists\, \mathbf{u}_i$: $\mathbf{v}_i = X_i\mathbf{u}_i$.

Ekkor $P_i\mathbf{v} = \sum_j P_i\mathbf{v}_j = \sum_j P_iX_j\mathbf{u}_j = \sum_j X_iY_iX_j\mathbf{u}_j$,
és itt a $j \neq i$ indexű tagok 0-k, tehát $P_i\mathbf{v} = X_iY_iX_i\mathbf{u}_i = X_i\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$.

(4): Minden $\mathbf{v}$-re $A\mathbf{v} = AI\mathbf{v} \overset{(1)}{=} A\sum P_i\mathbf{v}$, de $P_i\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\lambda_i}$ a (3) miatt, tehát ez tovább $\sum A(P_i\mathbf{v}) = \sum \lambda_i(P_i\mathbf{v}) = \left(\sum \lambda_iP_i\right)\mathbf{v}$. Tehát $A = \sum \lambda_iP_i$.

D A tételben szereplő $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ az A diagonalizálható mátrix spektrálfelbontása.

Mj A tétel (3) pontjából következik, hogy a spektrálfelbontás (amikor létezik, azaz diagonalizálható esetben) egyértelmű.

F Írjuk fel az előző példa M mátrixának spektrálfelbontását!

m

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$M = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ ahol } M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

A sajátfelbontás diadikus alakjából, az azonos sajátértékhez tartozó tagok összevonásával is megkaphatjuk a spektrálfelbontást.

Mátrixhatványozás spektrálfelbontás segítségével

Á Ha A diagonalizálható, és $A = \sum \lambda_i P_i$ a spektrálfelbontása, akkor $A^m = \sum \lambda_i^m P_i$.

B Teljes indukcióval. $m = 0$-ra és $m = 1$-re igaz a spektrálfelbontásról szóló tétel (1) és (4) állítása miatt. Ha $(m-1)$-re igaz, akkor $A^m = A^{m-1}A = \left(\sum_i \lambda_i^{m-1} P_i\right)\left(\sum_j \lambda_j P_j\right) = \sum_i \lambda_i^{m-1} P_i \lambda_i P_i$, mert $P_i P_j = 0$, ha $i \neq j$. Így $A^m = \sum_i \lambda_i^m P_i^2 = \sum_i \lambda_i^m P_i$.

K Ezt felhasználva a sajátvektorok kiszámítása nélkül is megkaphatjuk a spektrálfelbontást. Ha a fenti egyenletet felírjuk $m = 0, 1, \ldots, k-1$-re (ahol k a különböző sajátértékek száma), akkor az ismeretlen P_i mátrixokra kapott lineáris egyenletrendszert megoldva kifejezhetjük a P_i-ket az A kis hatványainak lineáris kombinációjaként. Ebből pedig megkapjuk A tetszőleges hatványát is.

P Számítsuk ki ilyen módon is a korábbi M mátrix spektrálfelbontását, és n-edik hatványát.

m Mivel M sajátértékei 2 és -1, és M diagonalizálható, van $M = 2P_1 + (-1)P_2$ spektrálfelbontása, és a szereplő P_i mátrixok kielégítik a

$$\begin{array}{rcrcr} P_1 & + & P_2 & = & I \\ 2P_1 & - & P_2 & = & M \end{array}$$

egyenletrendszert. Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & I \\ 2 & -1 & M \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & I \\ 0 & -3 & M-2I \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & \frac{1}{3}(I+M) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(2I-M) \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

Így $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ és $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, és $M^n = 2^n P_1 + (-1)^n P_2$.

Mj A $P_1, \ldots, P_k$-ra kapott egyenletrendszer mindig egyértelműen megoldható, mert a mátrixa Vandermonde-mátrix.

Sajátértékek numerikus közelítése

D **Gersgorin-körök**

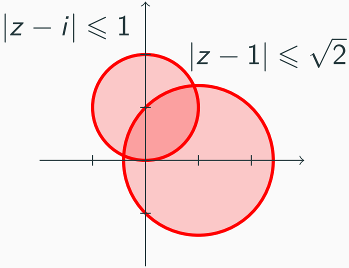
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Gersgorin-körei az a_{ii} középpontú, r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve az a_{ii} középpontú, r_i^{oszlop} sugarú G_i^{oszlop} körlapok a komplex síkon, ahol

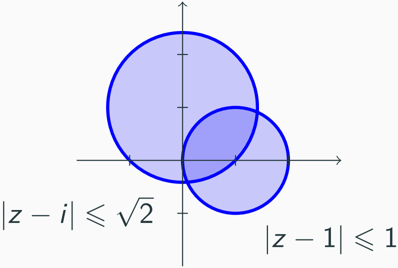
$r_i^{sor} = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ (az i. sor nem diag. elemeinek abszolút összege),

$r_i^{oszlop} = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$ (az i. oszlop nem diag. elemeinek absz. összege).

P Rajzoljuk fel az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1 & i \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin-köreit!

m





T $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ minden λ sajátértékére

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} G_i^{sor} \quad \text{és} \quad \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} G_i^{oszlop}$$

Ha az n kör közül k-nak az uniója diszjunkt a többitől, akkor ezek pontosan k sajátértéket tartalmaznak (alg. multiplicitással számolva).

B Csak az első állítást bizonyítjuk, és ebből is elég belátni a sorokra vonatkozó változatot, mert a A^T-nak ugyanazok a sajátértékei. Legyen $\mathbf{x}$ egy sajátvektor a λ sajátértékhez, és x_i az $\mathbf{x}$ legnagyobb absz. értékű komponense. Feltehető, hogy $x_i = 1$ (ha nem, akkor $\mathbf{x}$ helyett $\frac{1}{x_i}\mathbf{x}$-et vesszük), és így $|x_j| \leqslant 1 \ \forall\, j$.

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \quad i.\ \text{sora: } \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j + a_{ii} \cdot 1 = \lambda \Rightarrow$$

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = r_i^{sor}.$$

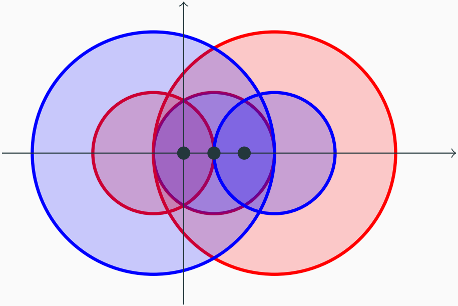
Az első $\leqslant$-nél a $\mathbb{C}$-beli (tkp. $\mathbb{R}^2$-beli) $|u + v| \leqslant |u| + |v|$ háromszög-egyenlőtlenséget használtuk.

K Ha A diagonálisan domináns (azaz $\forall\, i$-re $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$), akkor A invertálható, mert 0 nincs benne a Gersgorin-körök uniójában.

P1 Diagonális mátrixok Gersgorin-körei egypontúak.

P2 Rajzoljuk fel az $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin-köreit, és a sajátértékeit a komplex síkon.

m

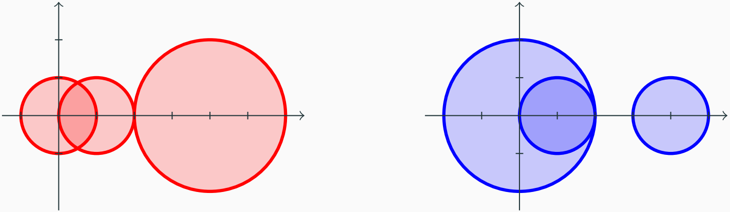


sorokból:	oszlopokból:
$\lvert z+1\rvert \leqslant 2$	$\lvert z+1\rvert \leqslant 4$
$\lvert z-1\rvert \leqslant 2$	$\lvert z-1\rvert \leqslant 2$
$\lvert z-3\rvert \leqslant 4$	$\lvert z-3\rvert \leqslant 2$

F Rajzoljuk fel a B mátrix Gersgorin-köreit! Mit tudunk meg ennek alapján a valós sajátértékekről?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

m Sorokból: Oszlopokból:



A tétel szerint a második ábra jobb oldali körében egyetlen sajátérték van (λ_1), a másik kettő uniójában (azaz közülük a nagyobbikban) kettő. Mivel a körök szimmetrikusak az x tengelyre, és $k_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ gyökeinek a konjugáltjai is gyökök, a különálló gyök csak valós lehet, és így benne van a $[3, 5]$ intervallumban.
A másik kettő a piros körök uniójában is benne van, tehát az ottani két kör uniójába esik.
Ez a két gyök is szükségképpen valós, mert $\det B = -2 < 0$ miatt a sajátértékek szorzata negatív, és $\lambda_1 > 0$, tehát λ_2, λ_3 nem lehetnek egymás konjugáltjai. Így $\lambda_2, \lambda_3 \in [-1, 2]$.

Á Ha $A, B \in K^{n\times n}$, és $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak és B-nek is λ, ill. μ sajátértékekkel, akkor

(1) $\mathbf{v}$ sajátvektora $A + B$-nek és cA-nak $\lambda + \mu$, ill. $c\lambda$ sajátértékkel;

(2) $\mathbf{v}$ sajátvektora AB-nek $\lambda\mu$ sajátértékkel;

(3) ha A invertálható, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora A^{-1}-nek $\frac{1}{\lambda}$ sajátértékkel;

(4) $p(x) = c_m x^m + \ldots + c_1 x + c_0 \in K[x]$-re $\mathbf{v}$ sajátvektora a $p(A) := c_m A^m + \ldots + c_1 A + c_0 I$ mátrixnak $p(\lambda)$ sajátértékkel.

B (1): $(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} = (\lambda + \mu)\mathbf{v}$, $cA\mathbf{v} = c\lambda\mathbf{v}$.

(2): $(AB)\mathbf{v} = A(B\mathbf{v}) = A(\mu\mathbf{v}) = \mu(A\mathbf{v}) = \mu(\lambda\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$.

(3): $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\exists\, A^{-1} \Rightarrow$

$\mathbf{v} = A^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A^{-1}\mathbf{v}) \Rightarrow \lambda \neq 0$ és $A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.

(4): $\left.\begin{array}{l} (2) \Rightarrow \mathbf{v} \text{ s.vektora } A^k\text{-nak } \forall k \geqslant 1\text{-re } \lambda^k \text{ s.értékkel} \\ \mathbf{v} \text{ s.vektora } I\text{-nek } 1 \text{ s.értékkel} \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\mathbf{v}$ a $p(A)$-nak is sajátvektora $p(\lambda)$ sajátértékkel.

Hatványmódszer

Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött, s.értékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ahol $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ teljesül $i > 1$-re.

Ekkor $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, mert különben $\overline{\lambda}_1 \neq \lambda_1$ is sajátérték lenne (ui. $k_A(x) \in \mathbb{R}[x]$), és $|\overline{\lambda}_1| = |\lambda_1|$.

Legyen $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, és definiáljuk a következő sorozatot:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \\ \mathbf{x}_k &= \frac{A\mathbf{x}_{k-1}}{|A\mathbf{x}_{k-1}|} \left(= \frac{A^k\mathbf{x}}{|A^k\mathbf{x}|}\right) \end{aligned}$$

Legyenek $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ s.-vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$-hez. $\mathbf{v}_1$-et választhatjuk valósnak, mert A és λ_1 valósak. Feltehető, hogy $|\mathbf{v}_1| = 1$.

Á Ha $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_n$, ahol $c_1 \neq 0$, akkor a fenti sorozat $\mathbf{v}_1$-hez vagy $-\mathbf{v}_1$-hez tart, és $(\mathbf{x}_k) \cdot A\mathbf{x}_k \to \lambda_1$.

B $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n \Rightarrow$

$A^k\mathbf{x} = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$

$\frac{1}{\lambda_1^k}A^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k c_n\mathbf{v}_n \to c_1\mathbf{v}_1$, ha $k \to \infty$.

Így $\mathbf{x}_k = \frac{A^k\mathbf{x}}{|A^k\mathbf{x}|} \to \frac{c_1\mathbf{v}_1}{|c_1\mathbf{v}_1|} = \frac{c_1}{|c_1|} \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \varepsilon\mathbf{v}_1$, ahol $|\varepsilon| = 1$.

De A és $\mathbf{x}$ valós $\Rightarrow$ minden $\mathbf{x}_k$ valós $\Rightarrow \lim \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \varepsilon = \pm 1$.

Továbbá $\mathbf{x}_k \to \varepsilon\mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{x}_k(A\mathbf{x}_k) \to (\varepsilon\mathbf{v}_1)(\varepsilon\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1(\varepsilon)^2|\mathbf{v}_1|^2 = \lambda_1$.

P $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$-val kezdve:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 21 \\ 34 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \ldots$

$\mathbf{x}_2 \cdot (A\mathbf{x}_2) = \frac{(5{,}8)(21{,}34)}{|(5{,}8)|^2} = \frac{377}{89} = 4{,}232955\ldots$,

és $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5} = 4{,}236067\ldots$.

P A korábban vizsgált $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixnak csupán az oszlopokhoz tartozó Gersgorin-köreiből is láthattuk, hogy van domináns sajátértéke: $\lambda_3 \in [3, 5]$, míg $|\lambda_1|, |\lambda_2| \leqslant 2$.

Továbbá $k_B(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, mert harmadfokú, és nincs racionális gyöke. Így $(f, f') = 1$, tehát $k_B(x)$-nek nincs többszörös gyöke ($\mathbb{C}$-ben sem) $\Rightarrow$ B diagonalizálható

$\Rightarrow$ alkalmazható rá a hatványmódszer.

$\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$-val indítva $\mathbf{x}_3$-ból $\lambda_1 \approx 4,23$, $\mathbf{x}_4$-ből $\lambda_1 \approx 4,19$.

A közelében ellenőrizve az értékeket, $k_B(4,16) > 0$ és $k_B(4,17) < 0$, tehát a kettő között van a sajátérték.

Mj Más sajátértéket is approximálhatunk, ha egy hozzá közeli c-re $(B - cI)^{-1}$ domináns sajátértékét keressük.