Bevezetés az algebrába 2

Euklideszi terek

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Valós euklideszi terek

D

Bilineáris függvény

Legyen $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ valós vektortér.

$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ bilineáris függvény, ha mindkét változójában lineáris, azaz

$$\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$

$$\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \text{ minden } \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V},\ \lambda \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

D

Skalárszorzat

A $\langle\ ,\ \rangle$ bilineáris függvény skalárszorzat, ha

szimmetrikus: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle\ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ és

pozitív definit: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0\ \forall\, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$-ra.

($\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$ következik a bilinearitásból.)

P1 A standard skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-ben és az altereiben skalárszorzat a fenti definíció szerint.

P2 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_A := \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris fv. $\mathbb{R}^n$-ben ($\mathbb{R}^n$ elemeit oszlopvektorokként írva).

Ez szimmetrikus $\iff$ A szimmetrikus, azaz ha $A = A^T$:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = \mathbf{y}^T A\mathbf{x} \overset{1\times 1\text{-es}}{=} (\mathbf{y}^T A\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y}.$$

Ez $= \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$, ha $A^T = A$, és fordítva,

ha $\mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}$-ra, akkor

$$(A^T)_{ij} = \mathbf{e}_i^T A^T \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T A\mathbf{e}_j = (A)_{ij} \;\forall\, i, j \Rightarrow A^T = A.$$

skalárszorzat, ha

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ szimmetrikus, és} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0 \;\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad A \text{ pozitív definit.}$$

$A = I$ esetén ez a standard skalárszorzat.

P3 $C([a, b])$-n skalárszorzat az $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

F Mikor lesz az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix pozitív definit?

m Szimmetrikus $\iff b = c$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + dy^2.$$

$a > 0$, különben $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle_A \leqslant 0$.

$ax^2 + 2bxy + dy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ad-b^2}{a}y^2$.

$ad - b^2 > 0$, mert különben $\mathbf{v} = (-\frac{b}{a}, 1)$-re $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leqslant 0$.

Tehát ha $\langle\ ,\ \rangle_A$ pozitív definit, akkor $a > 0$ és $\det A = ad - b^2 > 0$, és ez nyilván elégséges feltétel is.

D **Valós euklideszi tér**

$\mathcal{V}$ valós euklideszi tér, ha vektortér $\mathbb{R}$ fölött, és definiálva van rajta egy $\langle\ ,\ \rangle$ skalárszorzat.

D $\mathcal{V}$ valós eukl. téren értelmezzük:

$|\mathbf{v}| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$ hosszúságot vagy abszolút értéket,

$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{array}\right\} \rightsquigarrow \varphi$ szöget,

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ merőlegességet: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$.

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ortogonális rendszer, ha $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0\ \forall\, i \neq j$-re,

ortonormált rendszer, ha ortogonális, és $|\mathbf{v}_i| = 1\ \forall\, i$-re,

azaz $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \delta_{ij}\ \forall\, i, j$. $\left(\textbf{Def.: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}\right)$

$\mathcal{W}$ altér merőlegese $\mathcal{V}$-ben:

$\mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = 0\ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}\} \leqslant \mathcal{V}$.

$\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ merőleges vetülete $\mathcal{W}$-re $\mathbf{v}'$, ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, ahol $\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$ és $\mathbf{v}'' \in \mathcal{W}^\perp$.

Á Ha $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$ ortogonális rendszer, és nincs közte $\mathbf{0}$, akkor

(1) $\mathcal{B}$ ftln,

(2) a $\mathbf{b}_i' = \frac{1}{|\mathbf{b}_i|}\mathbf{b}_i$ vektorok ortonormált rendszert alkotnak.

B (1): $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \quad | \ \langle \mathbf{b}_j, \cdot \rangle$ tetszőleges j-re

$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i \rangle = \lambda_j |\mathbf{b}_j|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$, mert $\mathbf{b}_j \neq \mathbf{0} \Rightarrow |\mathbf{b}_j| \neq 0$.

(2): $\langle \frac{1}{|\mathbf{b}_i|}\mathbf{b}_i, \ \frac{1}{|\mathbf{b}_j|}\mathbf{b}_j \rangle = \frac{1}{|\mathbf{b}_i|\,|\mathbf{b}_j|}\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ \frac{|\mathbf{b}_i|^2}{|\mathbf{b}_i|^2} = 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$

Á Ha $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ ortonormált bázis $\mathcal{V}$-ben, akkor a $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b}_i$ előállításban az együtthatók: $x_i = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{v} \rangle$.

Ha csak ortogonális, akkor $x_i = \frac{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle} = \frac{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{b}_i|^2}$.

B $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{b}_j, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{b}_i \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i \rangle = x_j \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle$

$\Rightarrow x_j = \frac{\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle}$, és ez $= \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{v} \rangle$, ha $|\mathbf{b}_j| = 1$.

Á Legyen $\mathcal{V}$ valós eukl. tér, $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, és $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ ortogonális bázis $\mathcal{W}$-ben. Ekkor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ merőleges vetülete $\mathcal{W}$-re $\mathbf{v}' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{v}_i|^2} \mathbf{v}_i$.

B $\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$ ✓

$\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}' \rangle = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{v}_i|^2} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \frac{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{v}_j|^2} \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v} \rangle$, így $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v} - \mathbf{v}' \rangle = 0$ minden j-re, tehát $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathcal{W}^\perp$.

P Tekintsük a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, -2, 2, 3)$ ortogonális vektorrendszert $\mathbb{R}^4$-ben. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ vektor vetületét a $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ altérre!

m $\mathbf{v}' = \sum \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{v}_i|^2} \mathbf{v}_i = \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{5}{9}\mathbf{v}_2 + \frac{2}{18}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}((3, 0, -3, 3) + (10, 5, 10, 0) + (-1, -2, 2, 3)) = \frac{1}{9}(12, 3, 9, 6) = \left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$.

P A képlet nem működik, ha a megadott bázis nem ortogonális. Pl. $\mathcal{W} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$-re, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ és $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, és a $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ vektorra $\frac{2}{1}(1, 0, 0) + \frac{2}{2}(1, 1, 0) = (3, 1, 0)$ nem a $\mathbf{v}$ merőleges vetülete, mert $(2, 0, 1) - (3, 1, 0) = (-1, -1, 1)$ nem merőleges $(1, 0, 0)$-ra.

T **Gram–Schmidt-ortogonalizáció**

Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis a $\mathcal{V}$ euklideszi térben.
Ekkor $\exists\ \mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ ortogonális bázis, amelyre $\operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k)$ $\forall\, k$-ra.
$\mathcal{C}$ előállítható a következő rekurzióval: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1$, és ha $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{k-1}$ megvan, akkor

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{b}_k \rangle}{|\mathbf{c}_i|^2} \mathbf{c}_i.$$

B $\operatorname{span}(\mathbf{b}_1) = \operatorname{span}(\mathbf{c}_1)$. Tfh $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{k-1}$ kielégíti a feltételeket. Legyen $\mathcal{W} := \operatorname{span}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{k-1}) = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{k-1})$.
$\mathbf{b}_i$-k ftln-ek $\Rightarrow \dim \mathcal{W} = k-1 \Rightarrow \mathbf{c}_i$-k is ftln-ek $\Rightarrow$ nincs köztük $\mathbf{0}$.
A korábbi állítás szerint $\mathbf{b}'_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{b}_k \rangle}{|\mathbf{c}_i|^2} \mathbf{c}_i$ a $\mathbf{b}_k$ merőleges vetülete $\mathcal{W}$-re, így a tételbeli $\mathbf{c}_k = \mathbf{b}_k - \mathbf{b}'_k \in \mathcal{W}^\perp \Rightarrow \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k\}$ is ortog., és $\operatorname{span}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{k-1}, \mathbf{c}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k - \mathbf{b}'_k) = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_k)$.

Mj 1. Az egyes lépésekben az új $\mathbf{c}_k$ helyett annak tetsz. $\neq 0$ skalárszorosát is vehetjük.

2. Mivel $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) = \text{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$, a $\mathbf{c}_i$-k ftln-ek $\Rightarrow$ nincs köztük $\mathbf{0}$ $\Rightarrow$ ortonormált bázist is készíthetünk belőle.

3. Ha a kiinduló vektorrendszer nem ftln, akkor is végrehajtható az algoritmus, csak a közben keletkező $\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ vektorokat kidobjuk az új rendszerből.

P Alkalmazzuk a Gram–Schmidt-ortogonalizációt az $\{(1,1,0),(2,-1,3),(1,-1,1)\}$ bázisra.

m $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = (1,1,0)$

$\mathbf{c}_2' = (2,-1,3) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3)$ helyett $\mathbf{c}_2 = (1,-1,2)$.

$\mathbf{c}_3' = (1,-1,1) - \frac{0}{2}(1,1,0) - \frac{4}{6}(1,-1,2) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ helyett $\mathbf{c}_3 = (1,-1,-1)$.

Az új bázis $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(1,-1,2),(1,-1,-1)\}$.

Ebből ortonormált: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\right\}$.

F Keressünk ortogonális bázist $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$-ban az $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ skalárszorzatra nézve!

m Hogy egyszerűsítsük a számolást, foglaljuk táblázatba először az x-hatványok skalárszorzatait.

$\langle\ ,\ \rangle$	1	x	x^2	x^3
1	2	0	$\frac{2}{3}$	0
x	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$
x^2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0
x^3	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

$\int_{-1}^{1} x^k = 0$, ha k páratlan.
$\int_{-1}^{1} 1\ dx = 2$
$\int_{-1}^{1} x^2\ dx = [\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$
$\int_{-1}^{1} x^4\ dx = [\frac{1}{5}x^5]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$
$\int_{-1}^{1} x^6\ dx = [\frac{1}{7}x^7]_{-1}^{1} = \frac{2}{7}$

Az $\{1, x, x^2, x^3\}$ bázisra alkalmazva a GS-ortogonalizációt:

$\mathbf{c}_1 = 1,$

$\mathbf{c}_2 = x - 0 \cdot 1 = x,$

$\mathbf{c}_3 = x^2 - \frac{2/3}{2}1 = x^2 - \frac{1}{3},$

$\mathbf{c}_4 = x^3 - 0 \cdot 1 - \frac{2/5}{2/3}x = x^3 - \frac{3}{5}x.$

T **$\mathbb{R}^n$-nel való izomorfizmus**

Ha $\mathcal{V}$ n-dimenziós valós euklideszi tér, akkor $\exists f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ izomorfizmus, amely skalárszorzattartó, azaz $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v})$, ahol $\cdot$ a standard skalárszorzat.

B $\mathcal{V}$-nek van $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ ortonormált bázisa a Gram–Scmidt-ortogonalizáció tétele szerint.

A $k_\mathcal{C} : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_\mathcal{C}$ koordinátázó izomorfizmusra és $[\mathbf{u}]_\mathcal{C} = \mathbf{x}$, $[\mathbf{v}]_\mathcal{C} = \mathbf{y}$-ra

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \textstyle\sum_i x_i \mathbf{c}_i, \sum_j y_j \mathbf{c}_j \rangle = \displaystyle\sum_{i,j} x_i y_j \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \rangle = \sum_i x_i y_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = k_\mathcal{C}(\mathbf{u}) \cdot k_\mathcal{C}(\mathbf{v}).$$

K Minden olyan $\mathbb{R}^n$-re vonatkozó tétel, amely vektorműveleteket és a skalárszorzatból levezethető fogalmakat használ, teljesül tetszőleges véges dimenziós valós euklideszi térre is.

T Pithagorasz-tétel: $\mathcal{V}$ valós euklideszi $\Rightarrow$

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \text{ esetén } |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.$$

T Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség: $\mathcal{V}$ valós euklideszi $\Rightarrow$

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|,$$

és itt $=$ áll fenn $\iff$ $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

T Háromszög-egyenlőtlenség: $\mathcal{V}$ valós euklideszi $\Rightarrow$

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,$$

és itt $=$ áll fenn $\iff$ $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$ azaz, ha $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nemcsak párhuzamos, hanem egyirányú is.

Mj Az első kettőt bizonyítottuk $\mathbb{R}^n$-ben, a harmadik közvetlenül kijön a CSB-ből. De mindegyiket be fogjuk bizonyítani általánosabban: komplex euklideszi terekben.

Ortogonális és szemiortogonális mátrixok

T Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra ekvivalens:

(i) A oszlopai ortonormált rendszert alkotnak;

(ii) A sorai ortonormált rendszert alkotnak;

(iii) $A^T = A^{-1}$;

(ahol a skalárszorzat az $\mathbb{R}^n$-beli standard $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum x_i y_i$).

B $(AB)_{ij}$ az A i. sorának és B j-edik oszlopának standard skalárszorzata.

$$\text{Így} \begin{cases} \text{(i)} & \Leftrightarrow \quad A^TA = I \text{ és} \\ \text{(ii)} & \Leftrightarrow \quad AA^T = I. \end{cases}$$

Mivel négyzetes mátrixról van szó, az $A^TA = I$ és az $AA^T = I$ feltétel is ekvivalens azzal, hogy $A^T = A^{-1}$.

D **Ortogonális és szemiortogonális mátrixok**

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, ha a fenti tétel bármely feltétele teljesül.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ szemiortogonális, ha A oszlopai **vagy** sorai ortonormált rendszert alkotnak (ekvivalens: $A^TA = I$, illetve $AA^T = I$).

P1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ szemiortogonális, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ortogonális.

P2 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ sorai és oszlopai is ortogonálisak, de nem ortonormáltak.

Ezt sem hívjuk ortogonális mátrixnak (a név megtévesztő). Viszont ez skalárszorosa a $\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/4 \end{bmatrix}$ ortogonális mátrixnak.

P3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ sorai ortogonális rendszert alkotnak, de nem ortonormáltat (az oszlopai nem is ortogonálisak). A sorok lenormálásával ortogonálissá tehető a mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 5/\sqrt{42} & -4/\sqrt{42} & 1/\sqrt{42} \end{bmatrix}$$

Á Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ szemiortogonális, akkor kiegészíthető ortogonális mátrixszá sorok, illetve oszlopok hozzáadásával.

B Elég: $\mathbb{R}^n$-ben (vagy általánosabban $\mathcal{V}$ euklideszi térben) minden ortonormált rendszer kiegészíthető ortonormált bázissá:

Ha $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k\}$ ortonormált $\Rightarrow$ ftln $\Rightarrow$

kiegészíthető $\mathcal{B} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázissá.

$\Rightarrow$ *GS*-tel ebből a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{k+1}, \dots, \mathbf{c}_n\}$ ortonormált bázist kapjuk ($\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ nem változik az ortogonalizáció során).

D $\mathcal{V}$ valós euklideszi tér.

$f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció ortogonális, ha $\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ $\forall, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ (azaz f skalárszorzattartó).

T **Ortogonális transzformációk jellemzése**

$\mathcal{V}$ valós euklideszi tér. $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. tr.-ra ekvivalens:

(i) f távolságtartó: $|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$;

(ii) f hossztartó: $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$;

(iii) f skalárszorzattartó: $\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ (azaz f ortogonális);

(iv) f valamely/bármely ortonormált bázist ortonormált bázisba visz;

(v) $[f]_{\mathcal{B}}$ ortogonális mátrix valamely/bármely ortonormált $\mathcal{B}$ bázisra.

K Az origót helybenhagyó geometriai egybevágóságok távolságtartó lineáris transzformációk, így ortogonális transzformációk, tehát bármely ortonormált bázisban ortogonális a mátrixuk. Pl. $\mathbb{R}^2$-ben a $(2, -1)$ normálvektorú $y = 2x$ egyenesre való tükrözés standard mátrixa $I - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, és az $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)\right\}$ bázisbeli $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixa is ortogonális.

B *(i) ⇒ (ii)*: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$-ra.

(ii) ⇒ (iii): $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, azaz $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ miatt a skalárszorzat kifejezhető a vektorok hosszával, tehát ami hossztartó, az skalárszorzattartó is.

(iii) ⇒ (i): $|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})|^2 = |f(\mathbf{u}-\mathbf{v})|^2 = \langle f(\mathbf{u}-\mathbf{v}), f(\mathbf{u}-\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2$.

(iii) ⇒ (iv): ✓

(iv) ⇒ (v): $[f]_{\mathcal{B}}$ oszlopai $[f(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{B}} = k_{\mathcal{B}}(f(\mathbf{b}_i))$, és $k_{\mathcal{B}}$ is skalárszorzattartó, tehát ha $\mathbf{b}_i$-k ortonormáltak, $[f]_{\mathcal{B}}$ oszlopai is azok.

(v) ⇒ (iii): Legyen $\mathcal{B}$ ortonormált bázis, amelyben $[f]_{\mathcal{B}}$ ortogonális mátrix, és tfh $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$, $[f]_{\mathcal{B}} = A$. Ekkor $\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})\rangle \overset{\mathcal{B}\text{ orton.}}{=} [f(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}}^T [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{y} \overset{(v)}{=} \mathbf{x}^T\mathbf{y} \overset{\mathcal{B}\text{ orton.}}{=} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

Mj Számítási feladatokban előnye az ortogonális mátrixoknak, hogy könnyű kiszámítani az inverzüket: ha Q ortog., akkor $Q^{-1} = Q^T$.

QR-felbontás GS-ortogonalizációval

D

QR-felbontás

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes oszloprangú (azaz $r(A) = n$). A (redukált) QR-felbontása $A = QR$, ha

$Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ szemiortogonális,

$R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ felső Δ-mátrix, az átlójában pozitív elemekkel

($\Rightarrow R$ inv.-ható)

Ha $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ az A oszlopai, és $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ a Q oszlopai, akkor az $A = QR$ felbontás azt jelenti, hogy

$\mathbf{a}_1 \in \operatorname{span}(\mathbf{q}_1)$,

$\mathbf{a}_2 \in \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$,

$\vdots$

$\mathbf{a}_i \in \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_i)$, ...

A GS-ortogonalizálás pont ilyen $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ ortonormált rendszert ad.

T **QR-felbontás létezése**

Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes oszloprangú, akkor $\exists!$ QR-felbontása.

B $\exists$: Hajtsuk végre az A mátrix $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ (feltevés szerint ftln) oszlopaira a GS-ortogonalizációt.

$$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \rightsquigarrow \underset{\text{ortogonális}}{\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}} \rightsquigarrow \underset{\text{ortonormált}}{\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}}, \text{ ahol } \mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{c}_i}{|\mathbf{c}_i|}$$

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{c}_i\mathbf{a}_k}{|\mathbf{c}_i|^2}\mathbf{c}_i \;\Rightarrow\; \mathbf{a}_k = \mathbf{c}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{c}_i\mathbf{a}_k}{|\mathbf{c}_i|^2}\mathbf{c}_i = |\mathbf{c}_k|\mathbf{q}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{c}_i\mathbf{a}_k}{|\mathbf{c}_i|}\mathbf{q}_i$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array}\right]}_{A} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{array}\right]}_{Q} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} & \begin{array}{|c|}\hline * \\ * \\ \vdots \\ |\mathbf{c}_k| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline\end{array} & \\ \cdots & & \cdots \end{array}\right]}_{R}$$

k. oszlop

!: Legyen két felbontás $A = QR = Q'R'$.

R, R' invertálható $\Rightarrow Q = Q'R'R^{-1}$.

$S := R'R^{-1}$ is invertálható felső Δ-mátrix, poz. diag.elemekkel, és

$Q = Q'S$.

Q és Q' oszlopai ortonormáltak $\Rightarrow Q^TQ = (Q')^TQ' = I \Rightarrow$

$I = Q^TQ = (Q'S)^T(Q'S) = S^T(Q')^TQ'S = S^TS. \Rightarrow$

$S^T = S^{-1}$ felső Δ, de alsó Δ is, ezért diagonális.

$S = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) \Rightarrow I = S^TS = \mathrm{diag}(d_1^2, \dots, d_n^2) \Rightarrow d_i^2 = 1\ \forall\, i$.

De minden d_i pozitív, tehát $d_i = 1\ \forall\, i$.

Így $S = I \Rightarrow R = R'$ és $Q = Q'$.

Mj A GS-ortogonalizációval kapott Q mátrix ismeretében R könnyen kiszámítható, nem kell végigkövetni a vektorok előállítását: $A = QR$-ből $Q^TA = Q^TQR = IR = R$, mivel Q oszlopokra vonatkozóan szemiortogonális.

P Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását!

m $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{4}{4}\mathbf{c}_1 = (2, -2, 2, -2)$
$\mathbf{c}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{8}{4}\mathbf{c}_1 - \frac{16}{16}\mathbf{c}_2 = (6, 2, 2, -2) - (2, 2, 2, 2) - (2, -2, 2, -2) =$
$(2, 2, -2, -2)$.
Így $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$.

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$R = Q^T A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Alkalmazás:

Teljes oszloprangú A mátrixra $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ optimális közelítő megoldásának kiszámítása

Legyen $A = QR$ redukált QR-felbontás.

$$\begin{aligned} \text{Normálegyenlet:}\quad A^T A\mathbf{x} &= A^T\mathbf{b} \\ (QR)^T(QR)\mathbf{x} &= (QR)^T\mathbf{b} \\ R^T Q^T QR\mathbf{x} &= R^T Q^T\mathbf{b} \\ Q^T QR\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b},\ \text{mert } R \text{ inv.-ható} \\ R\mathbf{x} &= Q^T\mathbf{b}. \end{aligned}$$

P Az előző feladat mátrixával keressük meg az $A\mathbf{x} = (8, 2, 2, 0)^T$ egyenlet optimális közelítő megoldását!

m $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (felfelé, behelyettesítésekkel).

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

D **Teljes QR-felbontás**

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes oszloprangú. $A = QR$ teljes QR-felbontás, ha $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonális mátrix, és $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ felső háromszög mátrix, pozitív diagonális elemekkel.

Á Legyen $Q = [Q_1 \mid Q_2] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonális, ahol $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ekkor $A = QR$ teljes QR-felb. $\Leftrightarrow$ $R = \left[\frac{R_1}{0}\right]$, és $A = Q_1 R_1$ red. QR-felb.

B $QR = [Q_1 \mid Q_2] \cdot \left[\frac{R_1}{0}\right] = Q_1 R_1 + Q_2 0 = Q_1 R_1$, ahol Q_1 nyilván szemiortogonális, és R pontosan akkor felső háromszögmátrix (poz. diag. elemekkel), ha $R = \left[\frac{R_1}{0}\right]$, ahol R_1 felső Δ (poz. diag. elemekkel).

K Az egyik felbontásból kiszámítható a másik: Q_1-et is ki tudjuk egészíteni GS-tel Q ortogonálissá.

D Legyen $\mathcal{V}$ valós euklideszi tér, és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$. Ekkor a $\mathcal{W}$-re való $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tükrözés az a lineáris transzformáció, amely $\mathcal{W}$ vektorait önmagukba, $\mathcal{W}^\perp$ vektorait az ellentettjükbe képezi.
Van ilyen lineáris transzformáció, mert a $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$ felbontáshoz tartozó $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ bázison megadhatjuk a $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathcal{B}$) és $\mathbf{c} \mapsto -\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \in \mathcal{C}$) megfeleltetéssel.

Mj A tükrözés ortogonális lineáris transzformáció, mert ha $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ ortonormált bázis $\mathcal{W}$-ben, ill. $\mathcal{W}^\perp$-ben, akkor $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ is ortonormált, és ebben a tükrözés mátrixa $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ ortogonális mátrix.

D Householder-tükrözés: $\mathbb{R}^n$ tükrözése egy hipersíkra

Á Ha $\mathbf{a}$ a hipersík normálvektora, azaz a hipersík $\operatorname{span}(\mathbf{a})^\perp$, akkor a tükrözés standard mátrixa: $I - \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$.

B $(I - \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} - 2\mathbf{a} = -\mathbf{a}$, és ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, akkor $(I - \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \cdot 0 = \mathbf{b}$.

Á Ha $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \neq 0 \Rightarrow \exists$ Householder-tükrözés, ami a $\mathbf{b}$ vektort a $\mathbf{c}$ vektorba viszi.

B Az összekötő szakasz felező merőleges ($\mathbf{b} - \mathbf{c}$ normálvektorú) hipersíkjára való tükrözés lesz az:

Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$. Ekkor $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c})$, és itt $\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \parallel \mathbf{a}$,

míg $\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \perp \mathbf{a}$ (mert $(\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0$),

így az $A = I - \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ tükröző mátrixra

$\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \overset{A\cdot}{\mapsto} \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{c}$.

F1 Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ normálvektorú hipersíkra való tükrözés mátrixát! Ellenőrizzük, hogy ortogonális!

F2 Írjuk fel annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, amely a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az negatív.

Alkalmazás a (teljes) QR-felbontás kiszámítására

$A = [\mathbf{a}_1 \mid \dots \mid \mathbf{a}_n]$. $\mathbf{a}_1 \neq 0$. Legyen $|\mathbf{a}_1| = d_1$, és $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ekkor $\exists$ Householder-tükrözés Q_1 mátrixszal, hogy $Q_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}$.

$\Rightarrow Q_1 A = \left[\begin{array}{c|c} d_1 & \\ \hline 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array}\right] =: A_1$. Ha az első $i-1$ oszlop már rendben van, akkor az i. oszlop átlótól lefelé terjedő részére alkalmazzuk a Householder-tükrözést.

$$A_{i-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 0 & * \end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & \mathbf{a} & * \end{array}\right]$$

$|\mathbf{a}| = d_i, \qquad Q_i'\mathbf{a} = \begin{bmatrix} d_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$

ahol Q_i' $(m-i+1) \times (m-i+1)$-es ortogonális mátrix.

Legyen $Q_i = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & Q_i' \end{array}\right]_{m\times m}$. $\Rightarrow$ Q_i ortogonális, és

$$Q_i A_{i-1} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & Q_i' \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} 0 \diagdown * & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & \mathbf{a} & * \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 \diagdown * & \multicolumn{2}{c}{*} \\ \hline 0 & \begin{matrix} d_i \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} & * \end{array}\right]$$

Végül $Q = Q_n \cdots Q_1$-re $QA = R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ felső Δ-mátrix pozitív $d_1, \ldots, d_n$ diagonális elmekkel, és Q, illetve Q^{-1} is ortogonális, mert ortogonálisak szorzata, illetve inverze.

$\Rightarrow A = Q^{-1}R = Q^T R$ teljes QR-felbontás.

Mj Korábban láttuk, hogy ebből is megkapható egy redukált felbontás, illetve a GS-ortogonalizálással kapott redukált felbontásból is kiszámítható egy teljes.

Mj A teljes QR-felbontás Q mátrixa nem négyzetes mátrixra nem egyértelmű, ez látható a redukáltból való kiszámításból.

P Határozzuk meg az alábbi A mátrix QR-felbontását Householder-tükrözésekkel!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

m

$$Q_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = A_1$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A_2 \Rightarrow R = Q_3 A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahol Q_1-hez: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $Q_1 = I - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Q_2'-höz: $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $Q_2' = I - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$,

$Q_3 = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$

Ebből $Q = Q_3 Q_2 Q_1$-re $QA = R \Rightarrow$
$A = Q^{-1}R = Q^T R = Q_1^T Q_2^T Q_3^T R = (Q_1 Q_2 Q_3)R$, mert a tükrözés mátrixa szimmetrikus ($\mathbf{aa}^T$ szimm., így $I - \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{aa}^T$ is az).

(A tükrözések szorzata viszont már nem feltétlenül szimmetrikus.)

$$Q^T = Q_1 Q_2 Q_3 = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 14 \\ -10 & 10 & 5 \\ 10 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

F Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 12 & 26 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Hauseholder-tükrözésekkel!

m $Q_1 = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$, $\quad Q_1 A = \begin{bmatrix} 13 & 24 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$, $\quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$R = Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} 13 & 24 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\quad A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & 24 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$.

QR-felbontás Givens-forgatásokkal

F $\mathbb{R}^2$-ben mi egy origó körüli α szögű forgatás standard mátrixa?

m $\mathbb{R}^2$-et komplex síknak tekintve:

$x + yi \mapsto (x + yi)(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$
$(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.

$\Rightarrow$ A standard mátrix $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

K Tetszőleges $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$-re $\exists$ forgatás: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

B $-\alpha$-val való forgatás kell, ahol α az $a + bi$ szöge.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/r & b/r \\ -b/r & a/r \end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Valóban: $\frac{1}{r}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} a^2 + b^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$.

D Givens-forgatás: $\mathbb{R}^n$ ortogonális transzformációja, amely két koordinátatengely által kifeszített síkon forgatásként hat, a többi koordinátatengely vektorait helyben hagyja.

Mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos\alpha & & & -\sin\alpha & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & \sin\alpha & & & \cos\alpha & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Mj Ennek a determinánsa 1, mert hasonló a $\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, 1, \dots, 1\right)$ blokkdiagonális mátrixhoz.

Á Minden $\mathbf{v} = (\ldots, a, \ldots, b \ldots)$ vektorhoz van olyan Givens-forgatás, amely ezt a $(\ldots, r, \ldots, 0, \ldots)$ vektorba viszi, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\mathbf{v}$-nek csak az a és b komponense változik meg.

B Az alábbi mátrix megfelel:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & a/r & & & b/r & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & -b/r & & & a/r & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

F Írjuk fel annak a Givens-forgatásnak a mátrixát, amely az $(1, 3, -2, 5)$ vektort $(a, 3, 0, 5)$ alakúba viszi, ahol $a > 0$.

Teljes QR-felbontás előállítása Givens-forgatásokkal:

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \overset{f_{12}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} * & \vdots \\ 0 & \vdots \\ * & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \overset{f_{13}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} * & \vdots \\ 0 & \vdots \\ 0 & \vdots \\ * & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \dots \overset{f_{1n}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \\ \vdots & * \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{bmatrix} \overset{f_{23}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \\ \vdots & 0 \\ \vdots & * \\ 0 & \vdots \end{bmatrix} \longmapsto \dots$$

f_{ij} egy az $x_i x_j$ koordinátasíkon ható forgatás.

Ez nem rontja el a korábban kinullázott elemeket.

Ha a végén a háromszögmátrix alsó sorbeli diag. eleme negatív (ez csak négyzetes mátrixnál fordulhat elő), egy $\mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1, -1)$ tükrözéssel is szorzunk.

$\Rightarrow (Q_t \cdots Q_2 Q_1)A = R$ felső háromszögmátrix, és $Q = Q_t \cdots Q_2 Q_1$ ortogonális. $\Rightarrow A = Q^{-1}R = Q^T R$ teljes QR-felbontás.

P Számítsuk ki az A mátrix QR-felbontását Givens-forgatásokkal, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 3 & -15 & -5 \\ 12 & 40 & 5 \end{bmatrix}.$$

m a_{11}-hez és a_{12}-höz: $\sqrt{4^2+3^2} = 5$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & -15 & -7 \\ 12 & 40 & 5 \end{bmatrix} \quad \sqrt{5^2+12^2} = 13.$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 13 & 35 & 5 \\ 0 & -15 & -7 \\ 0 & 20 & 1 \end{bmatrix} \quad \sqrt{(-15)^2+20^2} = 25$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 13 & 35 & 5 \\ 0 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = R.$$

$$Q = Q_3 Q_2 Q_1 = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 12 \\ -3 & -12 & 4 \\ 12 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 3 & -15 & -5 \\ 12 & 40 & 5 \end{bmatrix} = Q^T R = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 12 \\ 3 & -12 & -4 \\ 12 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 35 & 5 \\ 0 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mj Mivel A négyzetes, a teljes és a redukált felbontása megegyezik, és így mindegyik egyértelmű. Ebben az esetben R invertálható, így a felbontásban szereplő ortogonális mátrixot AR^{-1} alakban is kiszámíthatjuk a $(Q_t \cdots Q_2 Q_1)^T$ szorzat helyett (és háromszögmátrixot viszonylag könnyű invertálni).

Mj Egy négyzetes mátrixot pontosan akkor lehet csupán Givens-forgatások felhasználásával QR alakra hozni, ha a determinánsa pozitív:

Láttuk, hogy A felírható $A = (TQ)^T R$ alakban, ahol Q Givens-forgatások szorzata, amelyeknek pozitív a determinánsa, $|R| > 0$ is igaz a QR-felbontás feltételei szerint, és $T = I$ vagy $T = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1)$ tükrözés. Így $|A| > 0 \Leftrightarrow T = I$.

F Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását GS-ortogonalizációval és Givens-forgatásokkal is!

m $A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Alkalmazások

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ optimális közelítő megoldása ($R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ az $A = QR$ red. felbontásból)
- QR-algoritmus négyzetes mátrix sajátértékeinek kiszámítására: $A_1 = A \overset{\text{QR-felb}}{=} Q_1 R_1 \rightsquigarrow A_2 := R_1 Q_1 \overset{\text{QR-felb}}{=} Q_2 R_2 \rightsquigarrow A_3 := R_2 Q_2 \ldots$ Így $A_{k+1} = Q_k^{-1} A_k Q_k \sim A_k \ldots \sim A$, és *bizonyos feltételek mellett* $\lim A_k$ háromszögmátrix $\Rightarrow$ az átló közelíti a sajátértékeket.

A három módszer összehasonlítása

- GS-módszer: kézzel számoláshoz kényelmes, közelítő számításokhoz nem jó, mert instabil.
- H-tükrözés: kevesebb lépés, mint a G-forgatás, de kényelmetlen a tükrözés mátrixának kiszámítása
- G-forgatás: elvileg sok lépés, de egy lépés a mátrixnak csak két során dolgozik (gépi számításnál előnyös), és könnyű felírni a hatást. Nagy, ritka mátrixoknál különösen előnyös.

Komplex euklideszi terek

D **Komplex bilineáris függvény**

Legyen $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ komplex vektortér.

$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ komplex bilineáris függvény, vagy szeszkvilineáris= másféllineáris függvény,ha

$$\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$

$\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, minden $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{C}$-re.

D **Skalárszorzat**

A $\langle\ ,\ \rangle$ komplex bilineáris függvény hermitikus skalárszorzat, ha

konjugált szimmetrikus: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}\ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ és

pozitív definit: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0\ \forall\, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$-ra.

($\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$ következik a konjugált szimmetriából.)

P $\mathbb{C}^n$-ben mint $\mathbb{C}$ fölötti vektortérben az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$ hermitikus skalárszorzat:

Mindkét változóban additív, és

$\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{(\lambda x_i)} y_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}\overline{x}_i y_i = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i = \overline{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

$\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i (\lambda y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \sum \overline{y}_i x_i = \sum x_i \overline{y}_i = \overline{\sum \overline{x}_i y_i} = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum \overline{x}_i x_i = \sum |x_i|^2 \geqslant 0$, és ha valamelyik tagja is pozitív, azaz ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, akkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$.

P Mi az $\mathbf{u} = (1, 1 - i, i)$ és $\mathbf{v} = (0, 2, 1 - 2i)$ vektorok skalárszorzata és hossza? ($|\mathbf{v}| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$.)

m $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 0 + (1 + i)2 + (-i)(1 - 2i) = i$

$|\mathbf{u}|^2 = |1|^2 + |1 - i|^2 + |i|^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \Rightarrow |\mathbf{u}| = 2$.

$|\mathbf{v}|^2 = \sqrt{|0|^2 + |2|^2 + |1 - 2i|^2} = 3$.

Mj $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$-en a $\mathbb{C}^n$ skalárszorzata ugyanaz, mint a valós skalárszorzat.

J $\mathbb{C}^n$ vektorait oszlopvektorokként írva $\mathbf{x}^* := (\overline{\mathbf{x}})^T = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ (konjugáljuk és transzponáljuk).

Ekkor a standard hermitikus skalárszorzat: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$.

D $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix adjungáltja $A^* = (\overline{A})^T$ (más, mint az $\operatorname{adj} A$).

Azaz $(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}\ \forall\, i, j$.

P $$\begin{bmatrix} 1-i & 2+i & 2i \\ 1 & -1+i & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 2-i & -1-i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}.$$

D **Komplex euklideszi tér**

$\mathcal{V}$ komplex euklideszi tér, ha vektortér $\mathbb{C}$ fölött, ellátva egy hermitikus skalárszorzattal.

A skalárszorzatból levezethető definíciók és tételek (a vektorok szögét kivéve) lényegében ugyanazok, mint a valós euklideszi térben.

D $|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$.

Így $\lambda \in \mathbb{C}$-re $|\lambda \mathbf{v}| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\overline{\lambda}\lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = |\lambda||\mathbf{v}|$.

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ($\Leftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$)

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ ortogonális rendszer, ha $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \ \forall\, i \neq j$-re,

ortonormált rendszer, ha $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \ \forall\, i, j$.

Altér merőlegese, altérre/vektorra való merőleges vetítés definíciója mint a valós eukl. terekben.

Á Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v}$ a $\mathcal{V}$ eukl. tér vektorai, akkor $\mathbf{v}$ vetülete $\mathbf{a}$-ra $\mathbf{v}' = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$.

B $\mathbf{v}' \parallel \mathbf{a}$ ✓

$\mathbf{v}'' := \mathbf{v} - \mathbf{v}'$-re $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}'' \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{a}, \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \rangle =$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{a}|^2} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0}$, így $\mathbf{v}'' \perp \mathbf{a}$.

Fontos az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle$ skalárszorzatban a sorrend, mert $\langle\ ,\ \rangle$ nem szimmetrikus!

F Gyakorlásképpen számítsuk ki $\langle \mathbf{v}'', \mathbf{a} \rangle$-t is!

T Gram–Schmidt-ortogonalizáció:

$$\underset{\text{ftln}}{\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}} \rightsquigarrow \underset{\text{ortogonális}}{\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}}: \quad \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)\ \forall k$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1, \qquad \mathbf{c}_k = \mathbf{b}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{b}_k \rangle}{|\mathbf{c}_j|^2} \mathbf{c}_j \qquad (k = 2, \dots, m)$$

K $\forall$ ortogonális ftln rendszer kiegészíthető ortogonális bázissá.
$\forall$ ortonormált ($\Rightarrow$ ftln) rendszer kiegészíthető ortonormált bázissá.

K Altér merőlegese direkt kiegészítő.

K n-dim. komplex eukl. tér $\cong \mathbb{C}^n$ skalárszorzattartó módon
(a $k_{\mathcal{C}}$ koordinátázó leképezés skalárszorzattartó, ha $\mathcal{C}$ orton. bázis)

F Ortogonalizáljuk a $\mathbf{v}_1 = (i, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, i, 1+i)$ rendszert $\mathbb{C}^3$-ben, és egészítsük ki ortogonális bázissá!

m $\mathbf{c}_1 = (i, 0, 1)$.

$\mathbf{c}_2' = (1, i, 1+i) - \frac{1}{2}(i, 0, 1) = (1 - \frac{1}{2}i,\ i,\ \frac{1}{2} + i) \parallel (2-i, 2i, 1+2i) =: \mathbf{c}_2$

$\begin{vmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1+i \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_3$ lehet $(1, 0, 0)$.

$\mathbf{c}_3' = (1, 0, 0) - \frac{-i}{2}(i, 0, 1) - \frac{2+i}{14}(2 - i, 2i, 1 + 2i) = (\frac{1}{7}, \frac{1}{7} - \frac{2}{7}i, \frac{1}{7}i)$

$\mathbf{c}_3 = (1, 1 - 2i, i)$.

$\{(i, 0, 1), (2 - i, 2i, 1 + 2i), (1, 1 - 2i, i)\}$ ortogonális bázis,

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(i, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{14}}(2 - i, 2i, 1 + 2i), \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1 - 2i, i)\right\}$ ortonormált.

A következő geometriai tételeket komplex euklideszi térre bizonyítjuk, de a bizonyítás a valós euklideszi téren is érvényes: az hermitikus skalárszorzat definiáló tulajdonságai valós skalárok és skalárszorzatok esetén a valós skalárszorzat tulajdonságait adják.

T **Pithagorasz-tétel**

Ha $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ a $\mathcal{V}$ komplex eukl. térben, akkor $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$

B $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle =$
$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 0 + 0.$

Mj Valós vektortérben igaz a Pithagorasz-tétel megfordítása is, de komplexben nem (hf.).

K Ha $\mathbf{v}'$ egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra való vetülete, akkor $|\mathbf{v}'| \leqslant |\mathbf{v}|$, és itt egyenlőség áll $\Leftrightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v}$.

B $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, ahol $\mathbf{v}'' \perp \mathbf{a}$, így $\mathbf{v}'' \perp \mathbf{v}'$
A Pithagorasz-tétel miatt $|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}''|^2 \geqslant |\mathbf{v}'|^2$.
Itt $=$ van $\Leftrightarrow |\mathbf{v}''| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}'' = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

T **Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**

Legyen $\mathcal{V}$ komplex euklideszi tér, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Ekkor

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|,$$

és itt $=$ áll fenn $\iff$ $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, azaz $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ egyike a másiknak skalárszorosa.

B Ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, akkor mindkét oldal 0, és a párhuzamosság is teljesül.
Tfh $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Ekkor $\mathbf{v}' = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ vetülete az $\mathbf{u}$-ra, így az előző állítás miatt
$|\mathbf{v}| \geqslant |\mathbf{v}'| = \left|\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}\right| = \left|\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}|^2}\right| |\mathbf{u}| = \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{|\mathbf{u}|^2}|\mathbf{u}|$.
Egyszerűsítve és átszorozva: $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \geqslant |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|$.
Egyenlőség akkor van, ha $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$, ami az előző állítás szerint pontosan $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ esetén teljesül. Mivel $\mathbf{v}'$ az $\mathbf{u}$ vektor skalárszorosa, ebből $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$ következik, és fordítva, ha $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$, akkor a $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$ felbontásban $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$ és $\mathbf{0} \perp \mathbf{u}$, tehát $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$.

T **Háromszög-egyenlőtlenség**

$\mathcal{V}$ komplex euklideszi tér, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \Rightarrow$

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,$$

és itt $=$ áll fenn $\iff$ ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ egyike a másiknak nemnegatív valós skalárszorosa.

B Mivel nemnegatív valós értékek szerepelnek az egyenlőtlenség két oldalán, elég a négyzeteikre belátni az egyenlőtlenséget.

$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle =$
$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$.

Vegyük észre, hogy egy $\alpha = a + bi$ komplex számra
$\alpha + \overline{\alpha} = 2a \overset{*}{\leqslant} 2|a| = 2\sqrt{a^2} \overset{**}{\leqslant} 2\sqrt{a^2+b^2} = 2|\alpha|$, tehát
$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 \leqslant |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \overset{CSB}{\leqslant} |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2$.
Ha $=$ van, végig az. $\Rightarrow \overset{CSB}{=}$, és $\alpha = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$-re $\overset{*}{=}$ és $\overset{**}{=}$. Így CSB-ből vagy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, vagy $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} \Rightarrow \alpha = \langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{u} \rangle = \lambda |\mathbf{u}|^2$, továbbá
$** \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, és $* \Rightarrow \alpha \geqslant 0$, így $\lambda \geqslant 0$ valós.
Visszafelé: $\lambda \geqslant 0 \Rightarrow |\mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}| = (1+\lambda)|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}| + \lambda |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}| + |\lambda \mathbf{u}|$.