Bevezetés az algebrába 2
Ortogonális és unitér diagonalizálás

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Speciális komplex mátrixok

D

Speciális mátrixok

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix

önadjungált, ha $A^* = A$

ferdén önadjungált, ha $A^* = -A$

unitér, ha $A^* = A^{-1}$

normális, ha $AA^* = A^*A$

Nyilván: Ha A öndajungált, ferdén önadjungált vagy unitér, akkor normális is.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $A^* = A^T$, így ekkor öndajungált = szimmetrikus, ferdén önadjungált = ferdén szimmetrikus, unitér = ortogonális.

P

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 2 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{önadjungált}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{bmatrix}}_{\text{ferd. önadj.}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\text{unitér}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{csak normális}}$$

Á Az adjungálás tulajdonságai

$A^{**} = A$

$(A+B)^* = A^* + B^*$

$(cA)^* = \overline{c}A^*$ $(c \in \mathbb{C})$

$(AB)^* = B^*A^*$

$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

B Egyszerűen látszik a konjugálás és a transzponálás műveleti tulajdonságaiból.

Mj Minden $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix felbontható egy önadjungált és egy ferdén önadjungált összegére (valós esetben szimmetrikus és ferdén szimmetrikus):

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^*) + \tfrac{1}{2}(A - A^*).$$

F Mi lehet egy unitér mátrix determinánsa?

m $|A^*| = \left|\overline{A}^T\right| = \left|\overline{A}\right| = \overline{|A|} \Rightarrow 1 = |I| = |A^*A| = \overline{|A|}|A|$, tehát $|A|$ egy 1 abszolút értékű komplex szám. (Minden ilyen lehet is, mert ha $|\varepsilon| = 1$, akkor $\mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \ldots, 1)$ unitér.)

Az önadjungált mátrixok tulajdonságai

Á $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált $\overset{\checkmark}{\iff}$ és a diag. elemei valósak, $a_{ij} = \overline{a}_{ji}\ \forall i,j$

Á Önadjungált mátrix minden sajátértéke valós.

B Legyen $\mathbf{x}$ az A önadj. mátrix egy sajátvektora λ sajátértékkel.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}^*A\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2 \\ \mathbf{x}^*A\mathbf{x} = \mathbf{x}^*A^*\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^*\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})^*\mathbf{x} = \overline{\lambda}|\mathbf{x}|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}, \text{ mert}$$

$|\mathbf{x}| \neq 0$.

A ferdén önadjungált mátrixok tulajdonságai

Á $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ferdén önadjungált $\overset{\checkmark}{\iff}$ és a diag. elemei tisztán képzetesek, $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}\ \forall i,j$

Á Ferdén önadjungált mátrix minden sajátértéke tisztán képzetes.

B Legyen $\mathbf{x}$ az A ferd. önadj. mátrix egy sajátvektora λ sajátértékkel.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}^*A\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2 \\ \mathbf{x}^*A\mathbf{x} = -\mathbf{x}^*A^*\mathbf{x} = -(A\mathbf{x})^*\mathbf{x} = -(\lambda\mathbf{x})^*\mathbf{x} = -\overline{\lambda}|\mathbf{x}|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -\overline{\lambda},$$

mert $|\mathbf{x}| \neq 0$. Azaz, ha $\lambda = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, akkor $a + bi = -(a - bi) = -a + bi \Rightarrow a = 0$.

Az unitér mátrixok tulajdonságai

Á **Unitér mátrixok jellemzése**

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$-re ekvivalens:

(i) A unitér

(ii) A oszlopai ortonormált bázist alkotnak

(iii) A sorai ortonormált bázist alkotnak

(iv) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ skalárszorzattartó

(v) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ hossztartó

B $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v)$ mint a valós esetben, csak A^T helyett A^*, $\mathbf{x}^T$ helyett $\mathbf{x}^*$ van.

$(v) \Rightarrow (iv)$: $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$

$$\langle \mathbf{x}+i\mathbf{y}, \mathbf{x}+i\mathbf{y}\rangle^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \bar{i}i\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle + i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - i\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$$

$\Rightarrow i|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}+i\mathbf{y}|^2 = (1+i)(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2) + 2i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$, így $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ kifejezhető a hosszakból.

Á Unitér mátrix minden sajátértéke 1 abszolút értékű.

B Legyen $\mathbf{x}$ az A unitér mátrix egy sajátvektora λ sajátértékkel.
$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^*\mathbf{x} = \mathbf{x}^* I\mathbf{x} = \mathbf{x}^* A^* A\mathbf{x} = |A\mathbf{x}|^2 = |\lambda\mathbf{x}|^2 = |\lambda|^2|\mathbf{x}|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1$,
mivel $|\mathbf{x}| \neq 0$. *Másképp:* $A\cdot$ hossztartó $\Rightarrow |\mathbf{x}| = |A\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$.

D **Unitér/ortogonális hasonlóság**

$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitéren hasonlók, ha van olyan $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrix, amelyre $B = U^{-1}AU$.
$A, B \in \mathbb{R}^n$ ortogonálisan hasonlók, ha van olyan $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, hogy $B = Q^{-1}AQ$.

D **Unitér/ortogonális diagonalizálhatóság**

Egy A $n \times n$-es komplex (vagy valós) mátrix unitéren (ortogonálisan) diagonalizálható, ha unitéren(ortogonálisan) hasonló egy diagonális mátrixhoz. (A valós esetben ebből következik, hogy a diagonális alak is valós.)

T Az önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, normális tulajdonság invariáns az unitér hasonlóságra.

B Legyen $A, B, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ahol U unitér, és $B = U^{-1}AU$. Vegyük észre, hogy ekkor $B^* = (U^{-1}AU)^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^{-1}A^*U$
Ha $A^* = A$, akkor $B^* = U^{-1}A^*U = U^{-1}AU = B$.
Ha $A^* = -A$, akkor $B^* = U^{-1}A^*U = U^{-1}(-A)U = -U^{-1}AU = -B$.
Ha $A^*A = I$, akkor
$B^*B = U^{-1}A^*UU^{-1}AU = U^{-1}A^*AU = U^{-1}IU = U^{-1}U = I$.
Ha $A^*A = AA^*$, akkor $B^*B = U^{-1}A^*UU^{-1}AU = U^{-1}A^*AU =$
$U^{-1}AA^*U = U^{-1}AUU^{-1}A^*U = BB^*$.

P $\mathbb{C}^n$ egy $\mathcal{W}$ alterére való merőleges vetítésnek vagy tükrözésnek a standard mátrixa önadjungált, mert a $\mathbb{C}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$ felbontáshoz tartozó ortonormált bázisban a mátrixa $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, illetve $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ önadjungált mátrix, és az ortonormált bázisra való áttérés U mátrixának az oszlopai ortonormált rendszert alkotnak, tehát az U-val való konjugálás unitér hasonlóság.

P Ezek a tulajdonságok nem invariánsak általában véve a hasonlóságra.

Pl. $A = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ unitér, de $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$-re

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3/5 & -8/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ nem unitér.

L $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$-re $r(A) = r(A^*A) = r(AA^*) = r(A^*)$.

B Lássuk be először, hogy $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*A)$.

$\leqslant$: Ha $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\geqslant$: Ha $A^*A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor $0 = \mathbf{x}^*A^*A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^*(A\mathbf{x}) = |A\mathbf{x}|^2 \Rightarrow$
$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A dimenziótétel miatt

$r(A) = n - \dim \mathcal{N}(A) = n - \dim \mathcal{N}(A^*A) = r(A^*A)$.

A néhány oszlopa pontosan akkor öf, ha A^* ugyanannyiadik sorai öf-k (az eredeti lin. komb. együtthatóinak a konjugáltját kell venni), tehát $r(A^*) = r(A)$, és az előző részt A^*-ra alkalmazva: $r(A^*) = r(AA^*)$.

Normális mátrixok tulajdonságai

Á Ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális, akkor $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(A^*) \quad (= \mathcal{S}(\overline{A}))$.

B Az nyilvánvaló, hogy $\mathcal{O}(A^*) = \mathcal{S}(\overline{A})$.

Mivel $\mathcal{O}(A) \geqslant \mathcal{O}(AA^*)$, és az előző lemma szerint azonos dimenziósak, azt kapjuk, hogy $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(AA^*)$.

Ugyanígy $\mathcal{O}(A^*) = \mathcal{O}(A^*A)$. Tehát A normalitása miatt $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(A^*)$.

Mj Bizonyítani fogjuk, hogy A pontosan akkor normális, ha unitéren diagonalizálható.

Mj A diagonális mátrixok valóban normálisak, mert az adjungáltjuk is diagonális, és két diagonális mátrix felcserélhető egymással.

Triangularizáció

T **Schur-felbontás**

Minden komplex négyzetes A mátrix unitéren hasonló egy T felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan U unitér mátrix, hogy $U^{-1}AU = T$.
Ha A valós, és minden sajátértéke valós, akkor ortogonálisan is hasonló egy háromszögmátrixhoz.

B Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.
$n = 1$: ✓ Legyen $\mathbf{u}_1$ sajátvektor λ sajátértékkel.
$\mathbf{u}_1$-et választhatjuk egységvektornak.

- Egészítsük ki $\mathbf{u}_1$-et ortonormált bázissá $\mathbb{C}^n$-ben: $\mathcal{C} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$.
$U_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \dots\ \mathbf{u}_n]$ unitér mátrixszal

$$U_0^{-1}AU_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^* \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} = B.$$

Az ind. feltétel miatt A_1-hez létezik olyan U_1 unitér és T_1 felső háromszögmátrix, hogy $U_1^{-1}A_1U_1 = T_1$.

Ekkor a $\hat{U}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_1 \end{smallmatrix}\right]$ unitér mátrixszal és $U = U_0\hat{U}_1$-pal:

$$
\begin{aligned}
U^{-1}AU = {\hat{U}_1}^{-1}B\hat{U}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T U_1 \\ \mathbf{0} & U_1^{-1}A_1U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T U_1 \\ \mathbf{0} & T_1 \end{bmatrix} =: T,
\end{aligned}
$$

ahol U unitér, T pedig felsőháromszög-mátrix.

Ha A és λ valósak, akkor ehhez van $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^n$ egységnyi sajátvektor, ez kiegészíthető ortonormált bázissá $\mathbb{R}^n$-ben, és az indukciós lépésbeli $\hat{U}_1$ ortogonális mátrixszal valós, ortogonális U-t, és ebből valós $T = U^{-1}AU$ háromszögmátrixot kapunk.

P Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Adjuk meg egy Schur-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$$

m Karakterisztikus polinom: $(x-1)^2 \Rightarrow$ Van valós Schur-felbontás.

sajátérték: $\lambda_{1,2} = 1$, sajátaltér: $\text{span}((4,3)) \Rightarrow$ nem diagonalizálható.

ONB: $\{(4/5, 3/5), (-3/5, 4/5)\}$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

Innen $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 1 & -25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

F Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra a következő mátrixot!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

m Ránézésre is megtaláljuk az $\mathbf{e}_3$ sajátvektort $\lambda = 1$ sajátértékkel. Az $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ ortonormált bázisra áttérve

$$Q_0^{-1} A Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =: B$$

$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sajátértékei $\lambda_{1,2} = 2$, egy egységnyi s.vektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\hat{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q_1 \end{bmatrix}$, és $T = \begin{bmatrix} 1 & 3/\sqrt{2} & -11/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Unitér diagonalizálhatóság

T **Spektráltétel**

Az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális.

B $\Rightarrow$: Ha D diag. $\Rightarrow$ D^* is diag. $\Rightarrow$ $D^*D = DD^*$, azaz D normális $\Rightarrow$ a vele unitéren hasonló A is normális.

$\Leftarrow$: Schur-felbontás: $U^{-1}AU = T$ (U unitér, T felsőháromszög-mátrix). A normális $\Rightarrow$ T is normális.

Így az alábbi lemmából következik az állítás.

Lemma: Egy T háromszögmátrix

$$\text{normális} \iff \text{diagonális.}$$

A lemma bizonyítása:

$\Leftarrow$: Láttuk, hogy a diagonális mátrixok normálisak.

$\Rightarrow$: Telj. ind. a mátrix méretére. 1×1-esre igaz.

$T = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$, ahol C felső háromszögmátrix.

$$T^*T = \begin{bmatrix} \bar{a} & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{b} & C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & \bar{a}\mathbf{b}^* \\ a\mathbf{b} & \mathbf{b}\mathbf{b}^* + C^*C \end{bmatrix}$$

$$TT^* = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{b} & C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 + |\mathbf{b}|^2 & \mathbf{b}^*C^* \\ C\mathbf{b} & CC^* \end{bmatrix}$$

$T^*T = TT^* \Rightarrow |\mathbf{b}| = 0 \Rightarrow \mathbf{b} = 0 \Rightarrow C^*C = CC^* \Rightarrow$ az ind. felt. miatt C diagonális, így $T = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$ diagonális.

K Minden önadjungált, ferdén önadjungált vagy unitér mátrix unitéren diagonalizálható!

Á **Speciális komplex mátrixok jellemzése diag. alakkal**

Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

(1) (Főtengelytétel) A önadjungált $\iff$ unitéren hasonló egy valós diag. mátrixhoz

(2) A ferdén önadjungált $\iff$ unitéren hasonló egy tisztán képzetes diag. mátrixhoz.

(3) A unitér $\iff$ unitéren hasonló egy olyan diag. mátrixhoz, amelynek minden diag. eleme 1 abszolút értékű.

B $\Rightarrow$: Mindhárom esetben normális a mátrix, így unitéren diagonalizálható. A diag. alak átlójában a sajátértékek vannak, és ezekről tudjuk a fenti tulajdonságokat.

$\Leftarrow$: Mivel a mátrix unitéren hasonló a megadott típusú diagonális mátrixhoz, elég a diagonálisról belátni, hogy önadjungált, ferdén öndajungált, ill. unitér, és az mindhárom esetben nyilvánvaló.

T (Valós főtengelytétel) Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B $\Rightarrow$: $D = Q^{-1}AQ$ valós diagonális, tehát A önadjungált és valós, így szimmetrikus.

$\Leftarrow$: A szimm. $\Rightarrow$ önadjungált $\Rightarrow$ sajátértékei valósak $\Rightarrow$ a Schur-tétel szerint van olyan ortog. Q, hogy $Q^{-1}AQ = T$ valós háromszögmátrix. De A normális $\Rightarrow$ T normális Δ-mátrix $\Rightarrow$ T diagonális.

K Két normális mátrix pontosan akkor hasonló (és akkor unitéren is), ha karakterisztikus polinomjuk megegyezik.

B Elég a diag. alakokra belátni, azok pedig permutációmátrixszal (így unitér mátrixszal) egymásba konjugálhatók.

K 1. Ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált, akkor van $\mathbb{C}^n$-nek A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa.

2. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, akkor van $\mathbb{R}^n$-nek A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa.

B Az unitér/ortogonális diagonalizálhatóság átfogalmazva.

P Az alábbiak közül melyik mátrix hozható valós vagy komplex diagonális alakra? Lehet-e a diagonalizáló mátrix unitér/ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

m A: 3 kül. sajátérték $\Rightarrow$ diag.-ható $\mathbb{R}$ fölött ,

de nemdiag. háromszög $\Rightarrow$ nem normális $\Rightarrow$ nem unitéren diag.-ható.

B: unitér, de nem önadjungált $\Rightarrow$ unitéren diag.-ható, de csak $\mathbb{C}$-beli diagonálissá

C: nem diag.-ható, mert a sajátértékei $1, 1, 1$, de nem hasonló I-hez

D: önadjungált $\Rightarrow$ unitéren valóssá diagonalizálható

F Mutassuk meg, hogy ortogonálisan hasonlók:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg A karakterisztikus polinomját!

Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!

M A szimmetrikus $\Rightarrow$ ortogonálisan diag.-ható, és a diag. alakban a diag. elemek a sajátértékek.

$r(A) = 1 \Rightarrow$ a 0 háromszoros sajátérték

$tr(A) = 4 \Rightarrow$ a negyedik sajátérték 4 $\Rightarrow$ a diag. alak $\mathrm{diag}(4, 0, 0, 0)$.

$k_A(x) = k_D(x) = x^3(x-4)$.

A 4-hez sajátvektor $(1,1,1,1)$, $V_0 = (1,1,1,1)^\perp$.

Alkalmas ortogonális bázist kaphatunk pl. az $(1,1,1,1), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ rendszer GS-ortogonalizálásával, de szebb:

$(1,1,1,1)$, $(1,1,-1,-1)$, $(1,-1,1,-1)$, $(1,-1,-1,1)$, amit lenormálva:

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

az áttérés mátrixa.