Bevezetés az algebrába 2

Kvadratikus alakok

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Kúpszeletek

P Milyen alakú a következő síkbeli egyenletek grafikonja?
(A) $x^2 - 2x + y^2 = 1$ (B) $y = \frac{1}{x}$ (C) $x^2 - y^2 = 0$
(D) $x^2 + 4y^2 = 1$ (E) $x^2 + y^2 = 0$

(A): $(x-1)^2 + y^2 = 2$ kör

(B): hiperbola

(C): $y = \pm x$ két metsző egyenes

(D): ellipszis

(E): pont

D Kúpszelet: egy (esetleg elfajuló) egyenes körkúp és egy sík metszete.

A kúpszeletek másodfokú egyenletek grafikonjai:

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$

Hogyan állapíthatjuk meg egy általános másodfokú egyenletről, hogy milyen alakzatot ír le?

Hogyan olvashatjuk le a kúpszeletek paramétereit?

Alkalmas (derékszögű) koordinátarendszerben kanonikus alakra hozhatók az egyenletek.

P A $0 = x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 2 = (x - 2y)^2 - 3y^2 + 6y - 2 = (x - 2y)^2 - 3(y - 1)^2 + 1$ egyenletre az $x' = x - 2y$ és $y' = y - 1$ átkoordinátázás $(x')^2 - 3(y')^2 = -1$ egyenletet ad.

Bár $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ nem egybevágóság, látható, hogy az alakzat hiperbola.

Kúpszeletek kanonikus alakja

kör	$x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$
ellipszis	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$
hiperbola	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ $(a > 0,\ b > 0)$
parabola	$y = cx^2$ vagy $x = cy^2$, $c \neq 0$
metsző egyenespár	$y^2 - (cx)^2 = 0$, $c \neq 0$
párhuzamos egyenespár	$x^2 = c$, $y^2 = c$, $c \geqslant 0$
egyenes	$y = c$, $x = c$
pont	$x^2 + y^2 = 0$

ahol r a kör sugara, a és b a féltengelyek hossza.

A hiperbolánál $y = \pm\frac{b}{a}x$ az aszimptoták.

Kvadratikus alakok

D Homogén másodfokú polinom: minden tag másodfokú.

P A $2x^2 + 4xy - y^2$ polinomot mátrixszorzat alakban is felírhatjuk:

$$2x^2 + 4xy - y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(Látható, hogy a mátrix akár szimmetrikus is lehet.)

D Valós kvadratikus alak (kvadratikus forma):

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \end{aligned}$$

függvény, ahol A szimmetrikus mátrix.

m Részletezve:

$$q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i & \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i & \dots & \sum_{i=1}^n a_{in}x_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^n a_{i1}x_ix_1+\sum_{i=1}^n a_{i2}x_ix_2+\ldots+\sum_{i=1}^n a_{in}x_ix_n$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \text{ homogén másodfokú polinom.}$$

D Egy $q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} c_{ij} x_i x_j$ valós kvadratikus alak (standard) mátrixa az az A valós szimmetrikus mátrix, amelyre $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$

A kvadratikus alak standard mátrixa egyértelmű: $i < j$-re $a_{ij} = a_{ji} = \frac{c_{ij}}{2}$, és $a_{ii} = c_{ii}$.

K Tetszőleges valós $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineáris függvényhez tartozik egy $q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alak, és ugyanaz a kvadratikus alak több bilineáris függvényhez is tartozhat, de ezek közül csak egy szimmetrikus.

P Mi az $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}$ bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak, és mi annak a mátrixa?

M A kvadratikus alak $x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2$, mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix}$.

Kvadratikus alak más bázisban

Áttérés más bázisra

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és $\mathbb{R}^n$ egy bázisa $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$.
$P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \dots\ \mathbf{b}_n]$ az áttérés mátrixa, és $\mathbf{x}'$ az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakja. Ekkor $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, így

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(P^T AP)\mathbf{x}'.$$

Tehát az új koordinátarendszerben a kvadratikus alak mátrixa $P^T AP$.

D **Kongruens mátrixok**

Azt mondjuk, hogy A és B kongruensek, jelölése $A \cong B$, ha van olyan **invertálható** P mátrix, hogy $B = P^T AP$.

Mj A lineáris leképezés mátrixa báziscsere esetén hasonló mátrixra változik, a kvadratikus alak mátrixa egy vele kongruensre.
Cél: $P^T AP$ legyen diagonális.

P Írjuk fel a $q(x,y) = x^2 - 6xy + y^2$ kvadratikus alakot a $\mathcal{B} = \{(2,1),(3,1)\}$ bázisban!

M A q kvadratikus forma mátrixszorzatos alakja

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, így

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

Tehát a kvadratikus alak a $\mathcal{B}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -7(x')^2 - 16x'y' - 8(y')^2.$$

T **Főtengelytétel kvadratikus alakokra**

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, és Q olyan ortogonális, amelyre $Q^{-1}AQ = D$ diagonális. Ekkor $Q^{-1} = Q^T$ miatt
az $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}'$ helyettesítés az $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ kvadratikus alakot az $(\mathbf{x}')^T D\mathbf{x}'$ kvadratikus alakba transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (\mathbf{x}')^T D\mathbf{x}' = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2,$$

ahol λ_1, λ_2,..., λ_n az A mátrix sajátértékei.

Mj Az, hogy Q ortogonális, biztosítja, hogy az új koordinátarendszer derékszögű, és azonos skálázású legyen az eredetivel.
Az is elérhető, hogy még az irányítása is megmaradjon, ha Q-t úgy választjuk (egy oszlopának az előjelét szükség esetén megváltoztatva), hogy $\det Q = 1$ legyen.

D A főtengelytétel alkalmazását egy kvadratikus alakon főtengely-transzformációnak nevezzük, az így létrejött alakot kanonikus alaknak.

Mj A kanonikus alak a változók permutációjától eltekintve egyértelmű, mert az együtthatók a kvadratikus alak mátrixának sajátértékei.

P Határozzuk meg a $q(x, y) = 4xy$ kvadratikus forma kanonikus alakját!

m A mátrixszorzat-alak: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Sajátpárok (azaz sajátértékek hozzájuk tartozó sajátvektorokkal): $(2, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1))$, $(-2, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1))$, így az áttérés mátrixa

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P^T AP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

tehát a kanonikus alak: $2(x')^2 - 2(y')^2$.

P Határozzuk meg

a) a $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz$ kanonikus alakját

b) és egy ehhez tartozó ortonormált bázist.

m a) A mátrixszorzatalak $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

karakt. polinom: $-x^3 + 5x^2 + 12x - 36$, sajátértékek 6, -3, 2,

a kvadratikus alak

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 6(x')^2 - 3(y')^2 + 2(z')^2.$$

b) A sajátvektorok rendre $(2,-2,1)$, $(-5,-4,2)$, $(0,1,2)$.

$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} < 0$ ezért az egyik vektort -1-gyel szorozzuk $\rightsquigarrow$

jobbsodrású ONB: $\left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}\right),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\}$.

Kúpszeletek ábrázolása

Másodrendű görbék ábrázolása

$$f(x,y) = \mathbf{v}^T A\mathbf{v} + \mathbf{c}^T\mathbf{v} + d = 0 \qquad (\mathbf{v} = [x\ y]^T,\ A \text{ szimm.})$$

A kvadratikus részben kiküszöbölhető a vegyes tag ortogonális transzformációval:
Ha $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = D = \mathrm{diag}(a,b)$ (a, b a két sajátérték),
és $\mathbf{v} = Q\mathbf{v}'$, akkor $(\mathbf{v}')^T D\mathbf{v}' + \mathbf{c}^T Q\mathbf{v}' + d = 0$, azaz

$$a(x')^2 + b(y')^2 + \alpha x' + \beta y' + d = 0.$$

(Feltehető: ha $ab = 0$, akkor $b = 0$.)
Ha $a, b \neq 0$: a lin. tagok beolvaszthatók a négyzetekbe (a koord.rsz. eltolásával) $\rightsquigarrow a(x'')^2 + b(y'')^2 = d'$.
Ha $a \neq 0,\ b = 0,\ \beta \neq 0$: az $\alpha x'$ az $a(x')^2$-be, majd a konstans a $\beta y'$-be olvasztható $\rightsquigarrow a(x'')^2 + \beta y'' = 0$.
Ha $a \neq 0,\ b = \beta = 0$: $\rightsquigarrow a(x'')^2 = d'$.
A transzformáció ($\det Q > 0$-val) mindig egy forgatás, majd eltolás.

Homogén másodrendű görbe ábrázolása

P Ábrázoljuk a $3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1$ egyenletű görbét!

m A kvadratikus alak mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$k_A(x) = x^2 - 6x + 5$, sajátpárok: $(5, (-1, 1))$, $(1, (1, 1))$

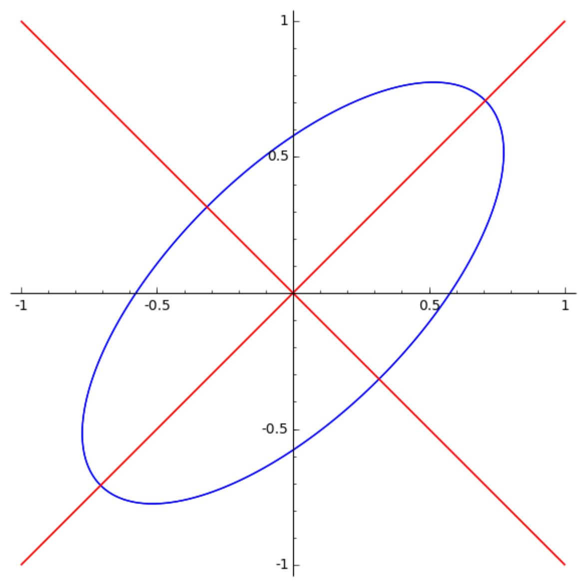
Q-t 1-determinánsúnak választva

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}$ helyettesítés után $5(x')^2 + (y')^2 = 1$, azaz

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + (y')^2 = 1$$

A koordinátarendszert $-45°$-kal fordítottuk el az origó körül.


1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1

Másodrendű görbe centrális helyzetbe hozása

P Ábrázoljuk a $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét, centrumát, tengelyeit!

m Az A sajátfelbontásából $\mathbf{v}^T A\mathbf{v} + \mathbf{c}^T\mathbf{v} + d = \mathbf{v}'^T D\mathbf{v}' + \mathbf{c}^T Q\mathbf{v}' + d$, ahol $\mathbf{v} = (x, y)$, $\mathbf{v}' = (x', y')$, $\mathbf{v} = Q\mathbf{v}'$, $\mathbf{c}^T = [-10 \ \ -20]$, $d = 5$,

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\leadsto 10(x')^2 + 5(y')^2 - 10\sqrt{5}y' + 5 = 0 \leadsto$

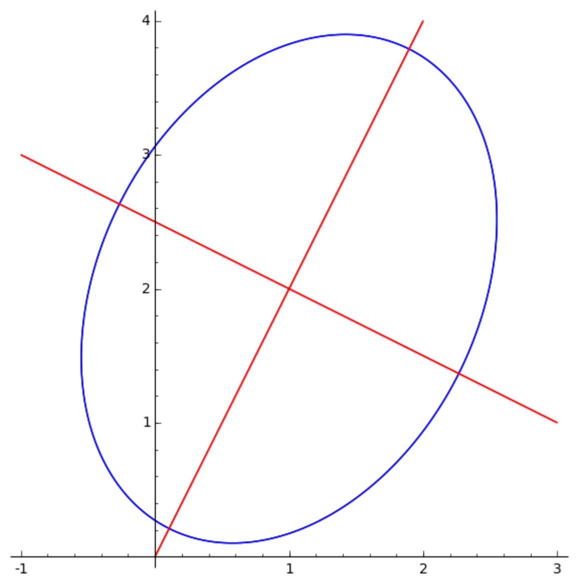
$10(x')^2 + 5((y')^2 - 2\sqrt{5}y' + 5) = 20$

$(x'', y'') = (x',\ y' - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2(x'')^2 + (y'')^2 = 4$, azaz

$\frac{(x'')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y'')^2}{2^2} = 1$

A féltengelyek hossza $\sqrt{2}$ és 2, a középpont $(x'', y'') = 0$, azaz $(x', y') = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x, y)^T = Q(0, \sqrt{5})^T = (1, 2)^T$,

a tengelyek iránytangense $-\frac{1}{2}$ és 2, egyenletük $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, $y = 2x$.

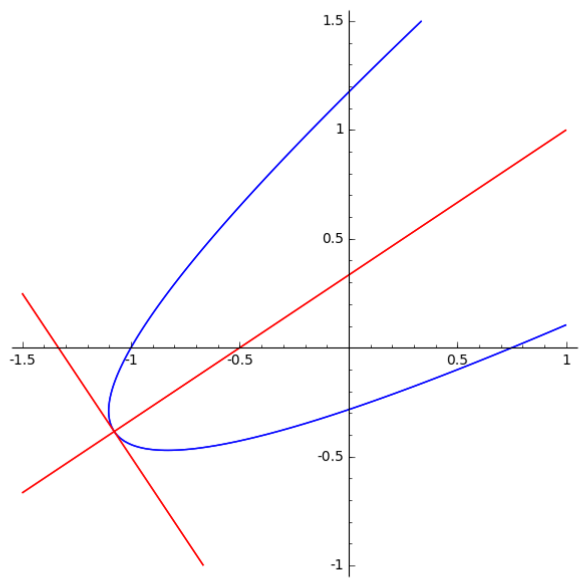

4
3
2
1
-1
1
2
3

P Ábrázoljuk a $4x^2 - 12xy + 9y^2 + x - 8y = 3$ egyenletű görbét!

m Az A sajátfelbontásából $\mathbf{v}^T A\mathbf{v} + \mathbf{c}^T\mathbf{v} + d = \mathbf{v}'^T D\mathbf{v}' + \mathbf{c}^T Q\mathbf{v}' + d$, ahol $\mathbf{v} = (x, y)$, $\mathbf{v}' = (x', y')$, $\mathbf{v} = Q\mathbf{v}'$, $\mathbf{c}^T = [1 \ \ -8]$, $d = -3$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ Q = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$13(x')^2 + 2\sqrt{13}x' - \sqrt{13}y' - 3 = 0 \rightsquigarrow 13(x' + \frac{1}{\sqrt{13}})^2 = \sqrt{13}(y' + \frac{4}{\sqrt{13}})$
$(x'', y'') = (x' + \frac{1}{\sqrt{13}}, y' + \frac{4}{\sqrt{13}})$ jelöléssel: $y'' = \sqrt{13}(x'')^2$.
A parabola csúcspontja $(x', y') = (-1/\sqrt{13}, -4/\sqrt{13})$, azaz
$[x \ y]^T = Q[-1/\sqrt{13} \quad -4/\sqrt{13}]^T = [-14/13 \quad -5/13]^T$,
szimmetriatengelye az y'' tengely, aminek az iránya $(3, 2)$, és átmegy a parabola csúcsán, így az egyenlete $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.


1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0.5
1

P Mit kapunk, ha az előző feladatban a következőképpen módosítjuk a lineáris tagokat?

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y = 3$$

m Ugyanazzal a mátrixszal, diagonális alakkal és ortogonális transzformációval. A változás:

$$4x - 6y = \begin{bmatrix} 4 & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 2\sqrt{13}x'$$

$(\sqrt{13}x' + 1)^2 = 4$

Tehát a görbe két párhuzamos egyenes uniója: $\sqrt{13}x' = \pm 2 - 1$, azaz $2x - 3y = 1$ és $2x - 3y = -3$ az eredeti koordinátarendszerben.

Valóban,

$(2x - 3y - 1)(2x - 3y + 3) = 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y - 3.$

P Ábrázoljuk a $x^2+6xy-7y^2-2x+10y-5=0$ egyenletű másodrendű görbét, centrumát, tengelyeit, aszimptotáit!

m Az A sajátfelbontásából $\mathbf{v}^TA\mathbf{v}+\mathbf{c}^T\mathbf{v}+d=\mathbf{v}'^TD\mathbf{v}'+\mathbf{c}^TQ\mathbf{v}'+d$, ahol $\mathbf{v}=(x,y)$, $\mathbf{v}'=(x',y')$, $\mathbf{v}=Q\mathbf{v}'$, $\mathbf{c}^T=[-2\ 10]$, $d=-5$,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & -7\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix},\ Q=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix},$$

$2(x')^2-8(y')^2+\frac{4}{\sqrt{10}}x'+\frac{32}{\sqrt{10}}y'-5=0 \rightsquigarrow$

$2(x'+\frac{1}{\sqrt{10}})^2-8(y'-\frac{2}{\sqrt{10}})^2=2$

$(x'',y'')=(x'+\frac{1}{\sqrt{10}},y'-\frac{2}{\sqrt{10}})$: $(x'')^2-4(y'')^2=1$, azaz

$(x'')^2-\frac{(y'')^2}{(\frac{1}{2})^2}=1$ hiperbola

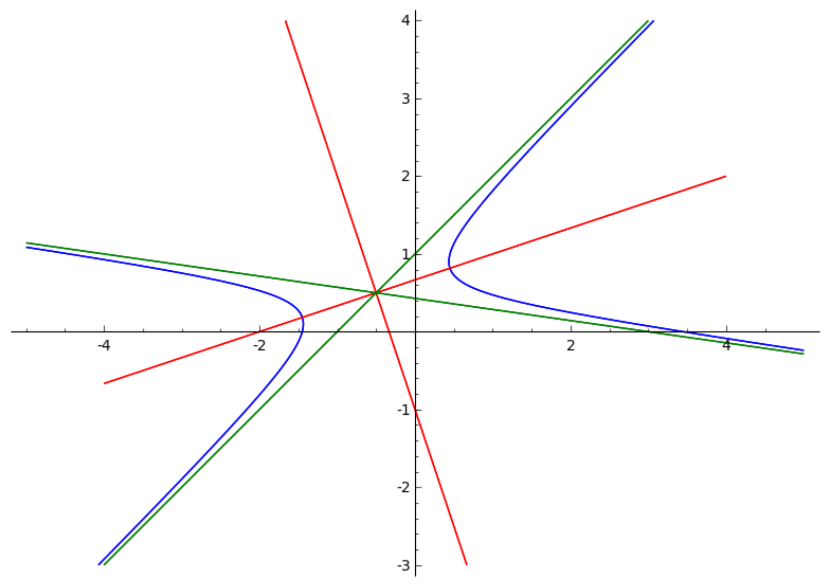
A középpont $(x,y)^T=Q(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}})^T=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$,

a tengelyek iránytangense $\frac{1}{3}$ és -3,

tengelymetszet az (x'',y'') koordinátarendszerben $x''=\pm1$,

az aszimptoták $y''=\pm\frac{1}{2}x''$, azaz $(-x+3y-2)=\pm\frac{1}{2}(3x+y+1)$,

vagyis $y=x+1$ és $y=-\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}$.


4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-2
2
4

Kúpszeletek osztályozása a kvadratikus rész szerint

A (legföljebb) másodfokú kétismeretlenes $\mathbf{v}^T A\mathbf{v} + \mathbf{c}^T\mathbf{v} + d = 0$ egyenlet (ahol $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$) kanonikus alakja

$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 = d'$	ahol λ_1, λ_2 az A nemnulla sajátértékei,
$(x'')^2 = ay''$ vagy $(x'')^2 = d'$	ha az egyik sajátérték 0,
$y'' = ax''$ vagy $x'' = 0$	ha mindkét sé. 0, de a poli. nem konst.

A sajátértékek előjele szerint:

sajátérték	kúpszelet (elfajuló)
$+, +$ vagy $-, -$	ellipszis (vagy egy pont, vagy $\emptyset$)
$+, -$	hiperbola (vagy metsző egyenespár)
$\pm, 0$	parabola (egyenes vagy párh. egyenespár, vagy $\emptyset$)
0, 0	(egyenes, sík, $\emptyset$)

Mj A kúpszelet típusa az A mátrixból is könnyen leolvasható:

$\det A = \lambda_1 \lambda_2$, így

ellipszis (vagy elf.) $\iff |A| > 0$

hiperbola (vagy elf.) $\iff |A| < 0$

parabola (vagy elf.) $\iff |A| = 0$

lineáris $\iff A = 0$.

Á Kongruens mátrixoknak azonos előjelű — de nem feltétlenül egyenlő — a determinánsa.

B $B = C^T AC$ valamely invertálható C-re $\Rightarrow$
$|B| = |C^T| \cdot |A| \cdot |C| = |C|^2 \cdot |A|$, és $|C|^2 > 0$.

Viszont például $I \cong (2I)^T I(2I) = 4I$, és a determinánsuk különbözik.

? Milyen információt őriz meg általában a sajátértékekről a mátrixok kongruenciája?