Bevezetés az algebrába 2

Kvadratikus alakok jellege

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Jelleg és diagonális alak

D **Kvadratikus alak jellege**

Az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ kvadratikus alak

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geqslant 0 \ \forall \mathbf{x}$;
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0 \ \forall \mathbf{x} \neq 0$;
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leqslant 0 \ \forall \mathbf{x}$;
- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

D A szimmetrikus A mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak az.

P Milyen a jellege a következő kvadratikus alakoknak?
$f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $g(x, y) = x^2 - 2y^2$, $h(x, y) = -x^2 - 2y^2$,
$k(x, y, z) = x^2 + 2y^2$

m f pozitív definit, mert az $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén értéke mindig pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, mert értéke $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$)

Mj Ha A negatív definit, akkor $-A$ pozitív definit. Hasonló állítás igaz a szemidefinitségre is.
$A = [a]$ pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.
I pozitív definit, ugyanis $\mathbf{x}^T I \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 > 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Á Tetszőleges A valós mátrix esetén $A^T A$ pozitív szemidefinit, és pontosan akkor pozitív definit, ha A teljes oszloprangú.

B $\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = |A\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.
$\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$: $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A$ oszlopvektorai lineárisan összefüggők, így
$A^T A$ pozitív definit $\iff A$ teljes oszloprangú

T **Definitség meghatározása a sajátértékekből**

Legyen A valós szimmetrikus mátrix, és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a sajátértékei ($\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i$)

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ kvadratikus alak pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\forall i : \lambda_i > 0$;
- pozitív szemidefinit, ha $\forall i : \lambda_i \geqslant 0$;
- negatív definit, ha $\forall i : \lambda_i < 0$;
- negatív szemidefinit, ha $\forall i : \lambda_i \leqslant 0$;
- indefinit, ha $\exists i, j$: $\lambda_i > 0$, $\lambda_j < 0$. is.

B Általánosabban bizonyítjuk:

T

Definitség meghatározása valamely diagonalizált alakból

Legyen a $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ kvadratikus alak mátrixa kongruens a diagonális $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ mátrixszal, azaz valamely P invertálható mátrixra $D = P^T AP$. Ekkor az A mátrix, illetve a q kvadratikus alak pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\forall i : d_i > 0$;
- pozitív szemidefinit, ha $\forall i : d_i \geqslant 0$;
- negatív definit, ha $\forall i : d_i < 0$;
- negatív szemidefinit, ha $\forall i : d_i \leqslant 0$;
- indefinit, ha $\exists i, j : d_i > 0, d_j < 0$.

B P invertálható, így

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$-re teljesül valamelyik definitség feltétele minden $\mathbf{x}$-re $\iff$ $(P\mathbf{x}')^T A(P\mathbf{x}')$-re teljesül minden $\mathbf{x}'$-re

Tehát elég a diag. D mátrixra, azaz a $q'(x) = d_1x_1^2 + \ldots + d_nx_n^2$ kvadr. alakra ellenőrizni a feltételeket,
és csak az első négy esetre (az ötödik a komplementum mindkét oldalon).

$\Rightarrow$: $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ helyettesítéssel

$\Leftarrow$:

- Ha $d_i > 0\ \forall i \Rightarrow d_ix_i^2 \geqslant 0\ \forall i$, és valamelyik $d_ix_i^2 > 0$.
- $d_i \geqslant 0\ \forall i \Rightarrow q'(\mathbf{x}) \geqslant 0\ \forall \mathbf{x}$
- A negatív (szemi)definit $\Leftrightarrow -A$ pozitív (szemi)definit, és $-A \cong -D$

Diagonalizálás szimultán sor-oszlopműveletekkel

Vegyük észre: az $X \mapsto EX$ elemi sorműveletnek megfelelő oszlopművelet az $Y \mapsto YE^T$ (ugyanis $(YE^T)^T = EY^T$).

Továbbá $A \cong EAE^T$, azaz, ha A-n egy adott sorművelet után ugyanazt az oszlopműveletet is elvégezzük, akkor A-val kongruens mátrixot kapunk. Ezt hívjuk szimultán sor-oszlopműveletnek.

Á Egy szimmetrikus mátrixot mindig diagonális kongruens alakra lehet hozni elemi sor-oszlopműveletekkel.

B A szimmetrikus A mátrixot elemi sorműveletekkel hozzuk felső háromszög alakra úgy, hogy minden sorművelet után a megfelelő oszlopműveletet is elvégezzük.

(*Az oszlopművelet nem rontja el a Δ alakot?)

$$E_k \dots E_2 E_1 A E_1^T E_2^T \dots E_k^T = P^T A P = R \cong A.$$

A kapott R mátrix szimmetrikus: $(P^T A P)^T = P^T A^T P = P^T A P$, tehát ha felső Δ, akkor diagonális is.

P $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{o_2-2o_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{s_3+s_1}{\rightsquigarrow}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{o_3+o_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_3-2s_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{o_3-2o_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*Ha az első i oszlop az átló alatt már csak 0-kat tartalmaz, akkor a további sorműveleteknek nem szabad megváltoztatniuk az első i sort (ezt amúgy sem tennénk a Gauss-eliminációnál), és akkor az első i oszlop sem változik az oszlopműveletek során sem.

Mj Semmi nem garantálja, hogy a P mátrix ortogonális, így a diagonális alak nem biztos, hogy a sajátértékeket tartalmazza. Az előző példában pl. A sajátértékei $\lambda_1 \approx -0,04$, $\lambda_2 \approx 4,13$, $\lambda_3 \approx 5,91$.

? Mi történik, ha a soron következő oszlop diagonális eleme 0?

Sorcsere+oszlopcsere?

P $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nem vezet eredményre

Akkor van baj, ha a másik sor diag. eleme is 0. Akkor viszont hozzáadhatjuk azt a sort az eredetihez.

P $\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1 + s_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} b & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \overset{o_1 + o_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2b & b \\ b & 0 \end{bmatrix}$

A szimultán sor-oszlopműveletekkel való diagonalizálás (szemben az ortogonális mátrixszal vett konjugálással) bármely olyan test fölött is működik, ahol $1 + 1 \neq 0$.

F Lássuk be, hogy $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$-ben a $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix nem kongruens semelyik diagonális mátrixszal.

m $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$-re $P^T A P = \begin{bmatrix} 0 & ad + bc \\ ad + bc & 0 \end{bmatrix} \neq D$, ha P inv.-ható.

P Küszöböljük ki a vegyes tagokat a $2xy + 2xz + 2yz$ kvadratikus alakban. Mi a kvadratikus alak jellege?

m A kvadratikus alak mátrixa és a sor- és oszlopműveletek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1+s_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{o_1+o_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{s_2-\frac{1}{2}s_1 \\ s_3-s_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{o_2-\frac{1}{2}o_1 \\ o_3-o_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D$$

$\Rightarrow 2(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 - 2(z')^2$. $\Rightarrow$ Indefinit.

(A kanonikus alak $2(x')^2 - (y')^2 - (z')^2$, ellenőrizzük!)

P^T-hoz jutunk, ha csak a sorműveleteket végrehajtjuk I-n:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_1+s_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-\frac{1}{2}s_1 \\ s_3-s_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = P^T$$

Ellenőrzés: $P^TAP = D$. Az új bázis:

$\left\{(1,1,0), \frac{1}{2}(-1,1,0), (-1,-1,1)\right\}$ (P oszlopai, azaz P^T sorai)

Szimultán elvégezve az elemi sorműveleteket az A-n és az I-n (az oszlopműveleteket csak az A-n, sőt, esetleg a sorműveleteket az $[A|I]$-n, az oszlopműveleteket meg csak az első felén) megkapjuk D-t és P^T-at egyszerre ($[A|I] \to [D|P^T]$):

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1+s_2 \\ o_1+o_2}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-\frac{1}{2}s_1 \\ o_2-\frac{1}{2}o_1}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_3-s_1 \\ o_3-o_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = [D|P^T]$$

P Hozzuk diagonális alakra: $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. $P =$? Jellege?

m

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-s_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{o_2-2o_1 \\ o_3-o_1}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+2s_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{o_3+2o_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] = [D|P^T] \Rightarrow \; P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A kvadr. alak az új bázisban: $(x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2$. Pozitív definit.

Mj Mivel a mátrixszorzás asszociatív, elvégezhetjük előbb az összes sorműveletet, majd csak utána az oszlopműveleteket, azaz az

$$s_2 - 2s_1, \quad o_2 - 2o_1, \quad s_3 - s_1, \quad o_3 - o_1, \quad s_3 + 2s_2, \quad o_3 + 2o_2$$

sorrend helyett

$$s_2 - 2s_1, \quad s_3 - s_1, \quad s_3 + 2s_2, \quad o_2 - 2o_1, \quad o_3 - o_1, \quad o_3 + 2o_2,$$

de ez csak akkor ad biztosan háromszög alakra hozásból diagonális alakot, ha nincs sorcsere és sort mindig csak lejjebb lévő sorhoz adunk (és ilyen esetben az oszlopműveletek már csak kinullázzák a mátrix átló fölötti részét):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-s_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \overset{s_3+2s_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{o_2-2o_1 \\ o_3-o_1 \\ o_3+2o_2}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok jellegét (definitségének típusát)!

m Az A mátrix sajátértékei 0, 0 és 3 $\Rightarrow$ A pozitív szemidefinit.

A B mátrix sajátértékei: $1, 1, 4$, mert $B = A + I$. $\Rightarrow$ B pozitív definit.

De A-t és B-t is könnyen lehet szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizálni.

A C mátrixról rögtön látszik, hogy indefinit, mert a főátlójában van pozitív és negatív elem is, így $\mathbf{e}_1^T C \mathbf{e}_1 < 0$ és $\mathbf{e}_3^T C \mathbf{e}_3 > 0$.

F Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szemidefinit és egy pozitív definit mátrix összege mindig pozitív definit (mint például a fenti $B = A + I$).

m Ha S poz. szemidefinit és P pozitív definit, akkor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$-ra $\mathbf{x}^T(S + P)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T S\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P\mathbf{x} > 0$, mivel $\mathbf{x}^T S\mathbf{x} \geqslant 0$ és $\mathbf{x}^T P\mathbf{x} > 0$.

P Múlt félévben a Fisher-egyenlőtlenség bizonyításakor be kellett látnunk, hogy az az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, amelynek átlójában $c + a_i$ ($c > 0$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$), a többi helyen pedig c áll, invertálható. A determináns kiszámítása helyett egy egyszerű indoklás a következő:

$A = cJ + \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ szimmetrikus mátrix, ahol J a csupa 1 elemű mátrixot jelöli.

J pozitív szemidefinit, mert a 0 $(n-1)$-szeres, és (a nyomból) nc 1-szeres sajátértéke (vagy másképp: a $c(x_1 + \ldots + x_n)^2$ kvadratikus alak mátrixa).

$\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ sajátértékei $a_1, \dots, a_n > 0$, tehát ez pozitív definit.

Az előző feladat szerint ebből következik, hogy A pozitív definit, így a 0 nem lehet sajátértéke.

$\Rightarrow A$ invertálható.

F Határozzuk meg a következő kvadratikus alakok jellegét!

$x_1^2 + x_1x_2$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

m $x_1^2 + x_1x_2$ mátrixa $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $k_A(x) = x^2 - x - \frac{1}{4}$,

sajátértékei $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ indefinit

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$ mátrixát szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizálva

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ pozitív definit.

Jelleg és főminorok

Emlékeztető az LU-felbontásról

D Egy A mátrix LU-felbontása: $A = LU$, ahol

L négyzetes alsó háromszögmátrix, átlójában csupa 1

U felső háromszögmátrix

T Ha az A mátrix minden főminorja, azaz bal fölső sarokaldeterminánsa $\neq 0$, akkor A-nak van LU-felbontása.

T Ha A invertálható, és van LU-felbontása, akkor az egyértelmű.

P $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

L $A = LU$ LU-felbontás $\Rightarrow$ A főminorjai megegyeznek U megfelelő főminorjaival.

B

$$A = \begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k U_k & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

$\Rightarrow |A_k| = |L_k| \cdot |U_k| = |U_k|$

T $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, $|A| \neq 0$,
$A = LU$ LU-felbontás, és U diagonális elemei $d_1, \ldots, d_n \Rightarrow$
$A = LDL^T$, ahol $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, és így $A \cong D$.

B $|A| \neq 0 \Rightarrow |U| = d_1 \cdots d_n \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1} \Rightarrow A = LU = LD(D^{-1}U)$, és itt $D^{-1}U$ $\forall$ diag. eleme 1.
$\Rightarrow (D^{-1}U)^T = L'$-re $A = LD(L')^T \Rightarrow$
$A = A^T = L'D^TL^T = L'(DL^T)$ is LU-felbontás,
de invertálható mátrixra ez egyértelmű $\Rightarrow$
$L = L' \Rightarrow A = LDL^T$, azaz $P = L^T$ áttérési mátrixszal $A \cong D$.

P Nézzük meg ezt az előző oldali példára!

T **Definitség és főminorok**

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixra

$$A \text{ pozitív definit } \iff A \text{ minden főminorja pozitív}$$

$$A \text{ negatív definit } \iff A \text{ főminorjainak előjele rendre } -,+,-,+,\dots$$

B ($\Rightarrow$) Pozitív/negatív definit mátrix bal fölső sarokmátrixai is ilyenek, ui.
a kvadr. alak $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k)$-ra való megszorításainak mátrixai.
Poz./neg. definit mátrixnak a 0 nem sajátértéke $\Rightarrow$ determinánsuk $\neq 0 \Rightarrow A$ főminorjai nem nullák $\Rightarrow$
A-nak van $A = LU$ LU-felbontása, és $A \cong D$ az U diagonális részére.
$\Rightarrow A$ főminorjai $\overset{\text{Lemma}}{=}$ U főminorjai: $d_1,\ d_1d_2,\ \dots,\ d_1d_2\cdots d_n$.
Ezek előjele a két esetben $++++\cdots$, ill. $-+-+\cdots$

($\Leftarrow$) A főminorok nemnullák $\Rightarrow$ az előző tétel szerint A-nak van LU-felbontása, amelyből $A \cong D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, és D (és egyúttal U) főminorjai $d_1,\ d_1 d_2,\ \ldots,\ d_1 d_2 \cdots d_n$.

a $++++\cdots$ esetben ebből $d_1 > 0$ és $d_1 d_2 > 0 \Rightarrow d_2 > 0$, és $(d_1 d_2) d_3 > 0 \Rightarrow d_3 > 0 \Rightarrow \ldots$

a $-+-+\cdots$ esetben $d_1 < 0$ és $d_1 d_2 > 0 \Rightarrow d_2 < 0$, és $(d_1 d_2) d_3 < 0 \Rightarrow d_3 < 0 \Rightarrow \ldots$

Így A az első esetben pozitív definit, a másodikban negatív definit.

K Ha a főminorok mind nemnullák, de az előjelsorozatuk egyikkel sem egyezik meg a fentiek közül, akkor a mátrix indefinit: a d_i-k sem csupa pozitívak, sem csupa negatívak nem lehetnek.

Mj Egy szimm. mátrix bármely szimmetrikus elhelyezkedésű részmátrixa (azaz, ahol annyiadik oszlopokat választjuk ki, ahányadik sorokat) a kvadratikus alak megszorításának mátrixa a megfelelő báziselemek által kifeszített altérre, tehát ha egy ilyen részmátrix indefinit, akkor az egész is az.

P Állapítsuk meg az alábbi mátrixok jellegét főminoraik segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

m A főminorai: $8,\ 15,\ 43 \Rightarrow A$ pozitív definit.

B főminorai: $-3, 2, -2, 2 \Rightarrow B$ negatív definit.

C-nek már a második főminora 0, így nem alkalmazható rá a tétel.

Viszont span$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$-on a mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, aminek a főminorai $1,\ -1$, így az utóbbi indefinit, és így szükségképpen C is az.

Mátrixfelbontások

Szimmetrikus mátrixok spektrálfelbontása

Láttuk, hogy minden diagonalizálható mátrixnak van spektrálfelbontása. Több is mondható:

T Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ különbözők.
$A \in K^{n\times n}$ diagonalizálható $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sajátértékekkel $\iff$
A felírható $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ alakban, ahol $\sum P_i = I$, $P_i^2 = P_i \neq 0$, és $P_i P_j = 0$, ha $i \neq j$.
Ebben a felbontásban a P_i mátrixok egyértelműek.

B $\Rightarrow$: Láttuk.
$\Leftarrow$ és egyértelműség: A felbontásból következik, hogy
$\mathcal{O}(P_i) \leqslant \mathcal{V}_{\lambda_i}$: $AP_i\mathbf{x} = \sum_j \lambda_j P_j P_i \mathbf{x} = \lambda_i P_i \mathbf{x}$;
$\sum \mathcal{O}(P_i) = K^n$: $\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \sum_i P_i \mathbf{x}$ $\forall \mathbf{x}$.
$\Rightarrow \sum \mathcal{V}_{\lambda_i} = K^n$, tehát A diagonalizálható, és $\mathcal{O}(P_i) = \mathcal{V}_{\lambda_i}$ $\forall i$.
$P_i\mathbf{x} = P_i(\sum_j P_j \mathbf{x}) = P_i \mathbf{x}$, tehát P_i a $\mathcal{V}_{\lambda_i}$-re való vetítés mátrixa a $\bigoplus \mathcal{V}_{\lambda_i}$ felbontás mentén, ezért a P_i- egyértelműek.

T Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, akkor az előző tételbeli felbontásában a P_i mátrixok is szimmetrikusak.

B A szimmetrikus, ezért diagonalizálható (valós sajátértékekkel), tehát valóban létezik az előző tétel szerinti felbontása.

$A = A^T = \sum \lambda_i P_i^T$ is ilyen tulajdonságú felbontás, így az egyértelműség miatt $P_i^T = P_i$.

Mj A P_i-k szimmetriája abból is következik, hogy V_{λ_i}-k merőlegesek, így a P_i-k merőleges vetítések mátrixai.

T **Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációja**

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus. A következők ekvivalensek:

(i) A pozitív szemidefinit,

(ii) $\exists$ szimm. pozitív szemidefinit B, hogy $A = B^2$.

(iii) $\exists$ $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, hogy $A = C^T C$.

B $(i) \Rightarrow (ii)$: A szimmetrikus $\Rightarrow A = QDQ^{-1} = QDQ^T$ (Q ortog.).
A pozitív szemidefinit $\Rightarrow$ minden sajátértéke $\geqslant 0 \Rightarrow D$ főátlóbeli elemeiből négyzetgyököt lehet vonni $\Rightarrow A = Q\sqrt{D}Q^T Q\sqrt{D}Q^T = BB$, ahol $\sqrt{D} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, és B pozitív szemidefinit, mert kongruens a nemnegatív elemű $\sqrt{D}$ diag. mátrixszal.
$(i) \Rightarrow (iii)$: $A = QDQ^T = Q\sqrt{D}\sqrt{D}Q^T = Q(\sqrt{D})^T\sqrt{D}Q^T = C^T C$, ahol $C = \sqrt{D}Q^T$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ és $(iii) \Rightarrow (i)$: $C^T C$-re korábban láttuk, és $BB = B^T B$.

Á Pozitív szemidefinit mátrixok pozitív szemidefinit négyzetgyöke egyértelmű.

B Tfh A és B pozitív szemidefinit, és $A = B^2$. Vegyük a B spektrálfelbontását: $B = \sum_{i=1}^{k} \mu_i P_i$. Ekkor $A = \sum \mu_i^2 P_i$. A $\lambda_i := \mu_i^2$ együtthatók mind különbözők, mert a μ_i-k különböző nemnegatív valósak.

Tehát ez A-nak a spektrálfelbontása, amiben a λ_i együtthatók (A sajátértékei) és a P_i mátrixok is egyértelműek, ezért a $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ számok és P_i-k a B felbonásában szintén egyértelműek, vagyis maga a B mátrix is az.

Alternatív számítási módszerek:

B-t kiszámíthatjuk a spektrálfelbontásból is:

Ha $A = \sum_i \lambda_i P_i$ a spektrálfelbontás, akkor $\lambda_i \geqslant 0$ és P_i szimmetrikus minden i-re. Ekkor $B = \sum_i \sqrt{\lambda_i} P_i$-re $B^2 = A$, és ez B-nek szintén spektrálfelbontása. Mivel P_i-k szimmetrikusak és az együtthatók nemnegatívak, B is pozitív szemidefinit.

C kiszámításához nem szükséges, hogy az áttérés mátrixa ortogonális legyen. Ha $A \cong D$ a P áttérési mátrixszal, akkor $P^T A P = D \Rightarrow$
$A = (P^{-1})^T D P^{-1} = (P^{-1})^T \sqrt{D} \sqrt{D} P^{-1} == C C^T$ a $C = \sqrt{D} P^{-1}$ mátrixra.

P Van-e olyan B és C mátrix, melyre $A=\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} = B^2 = C^TC$?

m Sajátértékek: 25, 0, a sajátvektorok ortog. mátrixa $Q=\frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, így a sajátfelbontás:

$$A = QDQ^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \sqrt{D}Q^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = Q\sqrt{D}Q^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$$

C helyett a B is jó. Ez mutatja, hogy C nem egyértelmű.

P Keressünk olyan C mátrixot, melyre $A = C^T C$, illetve olyan B pozitív szemidefinitet, amelyre $A = B^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

m Diagonalizáljuk az A mátrixot szimultán sor-oszlopműveletekkel!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [D \mid P^T] \Rightarrow$$

$$D = P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = (P^{-1})^T D P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C^T C$$

A pozitív szemidefinit négyzetgyök kiszámításához használjuk a spektrálfelbontást!

A $\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 & = & I \\ 2P_1 + P_2 + 0P_3 & = & A \\ 4P_1 + P_2 + 0P_3 & = & A^2 \end{cases}$ egyenletrendszerből elég a P_1, P_2 értékét kiszámítani, mert P_3 együtthatója A-ban 0.

$P_1 = \frac{1}{2}(A^2 - A)$, $P_2 = 2A - A^2$, $A = 2P_1 + P_2$, $B = \sqrt{2}P_1 + P_2$

$$B = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(Ez is jó C-nek.)

T **Pozitív definit mátrixok faktorizációja**

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus. A következők ekvivalensek:

(i) A pozitív definit,

(ii) az $A = LU$ LU-felbontásban U minden főátlóbeli eleme pozitív,

(iii) van olyan valós R felsőháromszög-mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme pozitív, és $A = R^T R$.

(iv) van olyan invertálható valós C mátrix, hogy $A = C^T C$,

A (iii) pont szerinti R egyértelmű.

D Az $A = R^T R$ felbontást az A mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük.

B $(i) \Rightarrow (ii)$: Mivel minden főminor pozitív, van $A = LU$ felbontás.
Láttuk, hogy ekkor $A \cong D$, ahol D az U diagonális része,
tehát A pozitív definitsége miatt D (és U) diag. elemei pozitívak.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Korábbi tétel szerint $A = LU = LDL^T$, és az 1. feltétel
szerint D diag. elemei pozitívak $\Rightarrow$
$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = L(\sqrt{D})^T\sqrt{D}L^T = R^TR$, ahol
$R = \sqrt{D}L^T$ felső háromszögmátrix, és R diag. része $\sqrt{D}$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Nyilván.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Tudjuk, hogy C^TC mindig pozitív szemidefinit. Továbbá
$|C| \neq 0 \Rightarrow |A| = |C|^2 \neq 0 \Rightarrow$ a 0 nem sajátérték $\Rightarrow A$ pozitív definit.
Cholesky-felb. egyértelműsége:
Legyen D_1 az R diag. része. Ekkor
$A = R^TR = (D_1^{-1}R)^T(D_1R) = LU$ LU-felb., ami egyértelmű, és
ebben D_1^2 az U diag. része, amiből a D_1 pozitívsága miatt D_1
egyértelmű, és akkor $R = D_1L^T$ is az.

P Adjuk meg az A mátrix Cholesky-felbontását, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

B A mátrix pozitív definit, mert a főminorok $1, \ 4, \ 4$.

Az LU-felbontás

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathrm{diag}(1,4,1) = \mathrm{diag}(1,2,1)\,\mathrm{diag}(1,2,1)$ és $R = \mathrm{diag}(1,2,1)L^T \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Szignatúra

T **Kvadratikus alak mátrixának kanonikus alakja**

Minden $A \in R^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz létezik olyan vele kongruens D_0 diagonális mátrix, amelynek a diagonális elemei az $\{1, -1, 0\}$ halmazból valók, és ez a D_0 a diagonális elemek sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Mj A mátrix kongruenciatranszformációval olyan diag. alakra is hozható, amelynek diag. elemei $1, 1, \dots, -1, -1, \dots, 0, 0, \dots$ (megfelelő permutációmátrixszal konjugálva). Ez az alak már teljesen egyértelmű.

B Legyen $A = P^T DP$, ahol $|P| \neq 0$, és $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Ekkor D felbontható diag. mátrixok $D_1 D_0 D_1$ szorzatára, ahol

$$(D_1)_i = \begin{cases} \sqrt{|d_i|} & \text{ha } d_i \neq 0 \\ 1 & \text{ha } d_i = 0 \end{cases} \qquad (D_0)_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } d_i > 0 \\ -1 & \text{ha } d_i < 0 \\ 0 & \text{ha } d_i = 0 \end{cases}$$

Így $A = P^T DP = P^T D_1 D_0 D_1 P = (D_1 P)^T D_0 (D_1 P)$.

Itt $|D_1 P| = |D_1| \cdot |P| \neq 0$, ezért $A \cong D_0$.

Az egyértelműséget később, általánosabb alakban bizonyítjuk.

D $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix szignatúrája (n_+, n_-, n_0), ha az A-val kongruens diagonális mátrixok átlójában n_+ darab pozitív, n_- darab negatív elem, és n_0 darab 0 van. (Az előző tétel miatt ez egyértelmű.)

P Határozzuk meg az alábbi mátrixok szignatúráját!

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

m A pozitív definit $\Rightarrow A \cong \operatorname{diag}(1,1,1)$, szignatúra: $(3,0,0)$.

B negatív definit $\Rightarrow B \cong \operatorname{diag}(-1,-1,-1,-1)$, szignatúra $(0,4,0)$.

C szimultán sor-oszlopműveletekkel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozható, így $C \cong \operatorname{diag}(1,-1,0,0)$ is igaz. C szignatúrája $(1,1,2)$.

T **Descartes-féle előjelszabály**

Valós együtthatós polinom pozitív valós gyökeinek száma vagy egyenlő a nemnulla együtthatók sorozatában az előjelváltások számával, vagy annál páros számmal kisebb. Azaz ha $v_+(p)$ jelöli a p polinom előjelváltásainak számát és $z_+(p)$ a pozitív gyökök számát, akkor

$$z_+(p) \leqslant v_+(p), \quad \text{és} \quad z_+(p) \equiv v_+(p) \pmod 2.$$

Ugyanezt $p(-x)$-re alkalmazva: ha $z_-(p)$ a negatív valós gyökök száma, és $v_-(p)$ a $p(-x)$ előjelváltásainak száma, akkor

$$z_-(p) \leqslant v_-(p), \quad \text{és} \quad z_-(p) \equiv v_-(p) \pmod 2.$$

P Hány pozitív és hány negatív gyöke lehet a $p(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 1$ polinomnak?

M $v_+(p) = 1$, $v_-(p) = 2 \Rightarrow z_+ = 1$, $z_- = 0$ vagy 2.

B Legyen $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$. Feltehető: $a_0 \neq 0$, $a_n > 0$.

$z_+(p) \equiv v_+(p) \pmod 2$:

- Ha $a_0 > 0$, akkor $p(x)$ 0-ban és ∞-ben is pozitív $\Rightarrow$ páros sok helyen metszi a tengelyt (ha érinti, de nem metszi, akkor a gyök páros multiplicitású). Ugyanekkor $v_+(p)$ is páros.
- Ha $a_0 < 0$, akkor $p(x)$ 0-ban neg., ∞-ben poz., így páratlan sok helyen metszi a tengelyt. Ugyanekkor $v_+(p)$ is páratlan.

$z_+(p) \leqslant v_+(p)$: Teljes indukcióval $\deg p$-re. $\deg p = 0$-ra igaz.

A $p(x)$ deriváltjára $v_+(p') = v_+(p)$ vagy $v_+(p) - 1$.

A Rolle-tétel miatt $z_+(p') \geqslant z_+(p) - 1$.

Ind. felt. $z_+(p') \leqslant v_+(p') \Rightarrow$
$z_+(p) \leqslant z_+(p') + 1 \leqslant v_+(p') + 1 \leqslant v_+(p) + 1$.

De $z_+(p) \equiv v_+(p) \pmod 2$, így $z_+(p) \neq v_+(p) + 1 \Rightarrow$
$z_+(p) \leqslant v_+(p)$.

Szignatúra meghatározása a karakterisztikus polinomból

K Ha egy $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomról tudjuk, hogy minden gyöke valós (például, mert egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja), akkor a pozitív gyökeinek a száma pontosan az együttható-sorozat előjelváltásainak a száma.

B Feltehető, hogy a konstans tag nem nulla.

$v_+(p) + v_-(p) \leqslant n$, mivel a $p(x)$-ben és $p(-x)$-ben két egymás utáni $c_i x^i$ és $c_j x^j$ $(i < j)$ tagra

- $j = i + 1$ esetén pontosan az egyiknél van előjelváltás
- $j \geqslant i + 2$ esetén lehet mindkettőnél, de akkor kihagytunk egy tagot.

Így az $n = z_+(p) + z_-(p) \leqslant v_+(p) + v_-(p) \leqslant n$ egyenlőtlenségben mindenhol egyenlőség van, így $z_+(p) = v_+(p)$ (és $z_-(p) = v_-(p)$).