Bevezetés az algebrába 2
Bilineáris függvények
Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Bilineáris függvények és mátrixaik

Ebben a részben $K = \mathbb{C}$ vagy $K = \mathbb{R}$.

Legyen $\mathcal{V}_K$ vektortér, és $\varphi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ szeszkvilineáris függvény ($K = \mathbb{R}$ esetén ez bilineárist jelent), azaz

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{u}', \mathbf{v}), \qquad & \varphi(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \overline{\lambda}\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}') &= \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}'), \qquad & \varphi(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) &= \lambda\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathcal{V}$, $\lambda \in K$.

(A szeszkvilineáris függvényt $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ fölött komplex bilineárisnak is hívjuk.)

D **Gram-mátrix**

Legyen a $\mathcal{V}_K$ vektortér egy bázisa $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. A φ komplex/valós bilineáris függvény $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó mátrixán vagy Gram-mátrixán azt az A mátrixot értjük, melyre

$$[A]_{ij} = \varphi(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \quad \forall i, j.$$

Á

Gram-mátrix hatása a koordinátavektorokon

Ha A a $\varphi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ Gram-mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban, akkor tetsz. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$-re és $\mathbf{x} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{y} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ koordinátavektorokra

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y},$$

és a Gram-mátrix az egyetlen ilyen tulajdonságú mátrix.

B Ha A a Gram-mátrix, akkor $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$

$= \varphi(\sum_i x_i\mathbf{b}_i,\ \sum_j y_j\mathbf{b}_j) = \sum_{i,j} \bar{x}_i y_j \varphi(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \sum_{i,j} \bar{x}_i y_j a_{ij} = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$.

Fordítva, ha A ilyen, akkor $\varphi(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \mathbf{e}_i^* A\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^T A\mathbf{e}_j = a_{ij}$ $\forall i, j$.

P Írjuk fel a $\mathbb{C}^2$-beli standard skalárszorzat mátrixát a $\mathcal{B} = \{(1-i, 1), (1, i)\}$ bázisban.

m $\begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}$ öndajungált mátrix.

D **Szimmetrikus/hermitikus bilin. fv-ek**

φ valós bilin. fv. szimmetrikus, ha $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})$ $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.
φ komplex bilin. fv. hermitikus, ha $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})}$ $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

T Egy φ komplex/valós bilin. fv.-re ekvivalens:

(i) φ hermitikus (szimmetrikus);

(ii) φ mátrixa minden $\mathcal{B}$ bázisban önadjungált (szimmetrikus);

(iii) φ mátrixa valamely $\mathcal{B}$ bázisban önadjungált (szimmetrikus).

B Elég komplexre bizonyítani, a valós ugyanúgy megy.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Ha A a φ mátrixa egy tetsz. $\mathcal{B}$-ben, akkor
$a_{ij} = \varphi(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j) = \overline{\varphi(\mathbf{b}_j,\mathbf{b}_i)} = \overline{a_{ji}}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: ✓

$(iii) \Rightarrow (i)$: Ha A a φ mátrixa valamely $\mathcal{B}$-ben, és $A^* = A$, akkor
$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}$-re és $\mathbf{x} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{y} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ koordinátavektorokra
$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y} = (\mathbf{y}^* A^*\mathbf{x})^* = (\mathbf{y}^* A\mathbf{x})^* = \overline{\mathbf{y}^* A\mathbf{x}} = \overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})}$.

Lehet-e a Gram-mátrix diagonális alkalmas bázisban? Olyan $\mathcal{B}$ bázist kell keresnünk, amelyre $\varphi(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0 \ \forall i \neq j$.

D Az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok ortogonálisak egy φ bilin. fv.-re nézve, ha $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$.

Mj Ha φ hermitikus (vagy valós terek esetében szimmetrikus), akkor $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$, de enélkül nem feltétlenül igaz.

P Legyen $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A \mathbf{y}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Ekkor

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, tehát pl. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$.

D Legyen φ komplex bilineáris fv.
$\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ bal merőlegese ${}^{\perp}\mathcal{W}_\varphi = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}$
$\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ jobb merőlegese $\mathcal{W}_\varphi^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0 \ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}$.
Nyilván mindkettő altér.

D $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altér merőlegese egy hermitikus/valós szimmetrikus φ-re nézve $\mathcal{W}_\varphi^{\perp}$ $(= {}^{\perp}\mathcal{W}_\varphi)$.

P

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathcal{W} = \operatorname{span}((1,1,0),(0,2,1)) \\ \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} \\ \mathcal{W}_\varphi^\perp = ?, \quad {}^\perp\mathcal{W}_\varphi = ? \end{array}$$

m $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = ?$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \mathcal{W}_\varphi^\perp = \operatorname{span}((-2,-1,1))$$

$$\mathbf{0}^T = \mathbf{x}^T A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = ? \qquad \text{Transzponálva:}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \quad {}^\perp\mathcal{W}_\varphi = \operatorname{span}(((-4,-1,2)).$$

Mj A φ szerinti merőleges altér nem feltétlenül kiegészítő dimenziójú, ha A nem invertálható.

T **Áttérés másik bázisra**

Legyen φ komplex/valós bilineáris fv. a $\mathcal{V}$ vektortéren, és $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{V}$ két bázisa, P pedig az áttérés mátrixa:

$$P = \left[[\mathbf{b}_1']_{\mathcal{B}}, \dots, [\mathbf{b}_n']_{\mathcal{B}}\right].$$

Ha A a φ mátrixa $\mathcal{B}$-ben, akkor P^*AP a φ mátrixa $\mathcal{B}'$-ben.

B $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{y} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{x}' = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'}$, $\mathbf{y}' = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$.

Ekkor $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}^*A\mathbf{y} = (P\mathbf{x}')^*A(P\mathbf{y}') = (\mathbf{x}')^*P^*AP\mathbf{y}' \Rightarrow$

$\varphi(\mathbf{b}_i', \mathbf{b}_j') = \mathbf{e}_i^*P^*AP\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^TP^*AP\mathbf{e}_j = (P^*AP)_{ij}\ \forall i, j$,

tehát P^*AP a φ Gram-mátrixa $\mathcal{B}'$-ben.

Kvadratikus alakok

D A φ komplex/valós bilin. fv.-hez tartozós kvadratikus alak: $q : \mathcal{V} \to K$, $q(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$.

P Mi az $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}$ standard Gram-mátrixhoz tartozó kvadratikus alak $\mathbb{C}^2$-en?

m $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = |x_1|^2 + i\bar{x}_1 x_2 + (1+i)\bar{x}_2 x_1.$

Általában egy kvadratikus alak $\mathbb{C}^n$-ben: $\sum\limits_{i.j} c_{ij}\bar{x}_i x_j$.

T (1) Egy valós kvadratikus alak többféle bilineáris függvényhez is tartozhat, de csak egyetlen szimmetrikus bilineáris függvényhez.

(2) Egy komplex kvadratikus alak egyetlen komplex bilineáris függvényhez tartozik.

(3) Egy komplex kvadratikus alak pontosan akkor tartozik hermitikus bilineáris függvényhez, ha valós értékű.

B (1): Ha φ valós szimm.:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{u},\mathbf{u})+\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v})+2\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= q(\mathbf{u})+q(\mathbf{v})+2\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ kifejezhető q-ból.

(2): Ha φ komplex bilin. fv.:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{u},\mathbf{u})+\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v})+\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v})+\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u}) \quad &\big|\cdot i \\ \varphi(\mathbf{u}+i\mathbf{v},\mathbf{u}+i\mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{u},\mathbf{u})+\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v})+i\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v})-i\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u}) \quad &\big|\cdot 1 \end{aligned}$$

Összeadva $\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})$ kiesik, és $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ kifejezhető q-val.

(3): $\Rightarrow$: $q(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v})} = \overline{q(\mathbf{v})} \Rightarrow q(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$: Legyen $\psi(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})}$ $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}$. Ez szintén komplex bilineáris:

Nyilván additív, és

$$\psi(c\mathbf{u},\mathbf{v}) = \overline{\varphi(\mathbf{v},c\mathbf{u})} = \overline{c\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})} = \bar{c}\cdot\overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})} = \bar{c}\psi(\mathbf{u},\mathbf{v})$$
$$\psi(\mathbf{u},c\mathbf{v}) = \overline{\varphi(c\mathbf{v},\mathbf{u})} = \overline{\bar{c}\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})} = c\cdot\overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})} = c\psi(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

De akkor $\varphi - \psi$ is komplex bilineáris, és a hozzá tartozó kvadratikus alak $\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v}) - \overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{v})} = q(\mathbf{v}) - \overline{q(\mathbf{v})} = 0$, mert $q(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$.

A 2. állítás miatt ebből $\varphi - \psi = 0$, azaz $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \overline{\varphi(\mathbf{v},\mathbf{u})}$ $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}$.

Mj $\mathbb{C}^n$-ben egy hermitikus bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak $q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} c_{ij}\bar{x}_i x_j$, ahol $c_{ji} = \bar{c}_{ij}$, tehát $q(\mathbf{x}) = \sum_i c_{ii}|x_i|^2 + \sum_{i<j}(c_{ij}\bar{x}_i x_j + \bar{c}_{ij}x_i\bar{x}_j) = \sum_i c_{ii}|x_i|^2 + \sum_{i<j} 2\,\mathrm{Re}(c_{ij}\bar{x}_i x_j) \in \mathbb{R}$.

Komplex kvadratikus alak diagonalizálása

T **Főtengelytétel bilineáris függvényekre**

Ha φ komplex hermitikus / valós szimmetrikus bilineáris fv. $\mathcal{V}$-n, akkor van $\mathcal{V}$-nek olyan $\mathcal{B}$ bázisa, amelyben φ mátrixa valós diagonális, és így $\mathcal{B}$ φ-ortogonális. Fordítva, ha φ-nek van valós diagonális mátrixa, akkor φ hermitikus / valós szimmetrikus.

B Legyen A a φ Gram-mátrixa egy tetszőleges $\mathcal{B}$ bázisban. Ekkor A öndajungált $\Rightarrow \exists\ U$ unitér: $U^{-1}AU = U^*AU$ valós diagonális, és ez φ mátrixa egy másik bázisban.

Fordítva, ha φ-nek van valós diagonális mátrixa, akkor az öndajungált, ezért φ hermitikus.

Mj Hermitikus bilineáris fv.-ek mátrixát is diagonális alakra lehet hozni szimultán sor-oszlopműveletekkel, csak itt az $s_i \mapsto s_i + cs_j$ sorművelethez az $o_i \mapsto o_i + \bar{c}o_j$ oszlopművelet tartozik. Így ha balról P-vel, jobbról P^*-gal szorzunk.

P $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$, és $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$.

a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ értékét $\mathbf{x} = (1, i, 0)$, $\mathbf{y} = (2-i, 1, 1)$-re.

b) Adjuk meg a φ által definiált kvadratikus alakot.

c) Diagonalizáljuk az A mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk φ-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$-ben.

M a) $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - i$

b) $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + i\bar{x}_1 x_2 - i\bar{x}_2 x_1 +$
$+(1+i)\bar{x}_1 x_3 + (1-i)\bar{x}_3 x_1 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_3 x_2$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & -1+i & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{o}{\mapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & -1+i & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+i & i & 1 \end{array}\right] \overset{o}{\mapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+i & i & 1 \end{array}\right] = [D|P^*] \rightsquigarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -i & -2-i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$D = \operatorname{diag}(1,1,0)$ és az új bázis $\{(1,0,0),(-i,1,0),(-2-i,-i,1)\}$.

Kvadratikus alak jellege

Mivel a komplex hermitikus bilin. fv.-ekhez tartozó kvadr. alakok valós értékűek, a jellegüket ugyanúgy lehet definiálni, mint a valós bilineáris függvényekből származó kvadratikus alakokét.

D Legyen $\mathcal{V}$ komplex vagy valós vektortér, és $q : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ valós értékű kvadratikus alak.

- q pozitív definit, ha $f(\mathbf{v}) > 0 \ \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
- q pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{v}) \geqslant 0 \ \forall \mathbf{v}$
- q negatív definit, ha $f(\mathbf{v}) < 0 \ \forall \mathbf{v} \neq 0$
- q negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{v}) \leqslant 0 \ \forall \mathbf{v}$
- q indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A jelleg meghatározásához használt módszerek átvihetők a komplex esetre is (a mátrixos feltételek a φ valós szimmetrikus, illetve komplex hermitikus bilineáris függvény tetszőleges bázisban felírt mátrixára vonatkoznak):

- diagonális alak diagonális elemeivel
- sajátértékekkel
- főminorokkal

P Az előző feladat komplex bilin. fv.-e által definiált kvadr. alak pozitív szemidefinit, mert $P^*AP = \text{diag}(1,1,0)$ alkalmas invertálható P-vel.

F Mi a jellege az $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ mátrixnak?

m A főminorok 2, 3 $\Rightarrow$ A pozitív definit.

Vagy: $k_A(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) \Rightarrow$ a sajátértékek $3, 1$ pozitívak $\Rightarrow$ pozitív definit

Vagy: $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & i \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$ pozitív definit

T **Sylvester-féle tehetetlenségi tétel**

Legyen φ komplex hermitikus vagy valós szimmetrikus bilineáris függvény egy $\mathcal{V}$ vektortéren, és $q(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. Ekkor $\mathcal{V}$ minden φ-ortogonális bázisán ugyanannyiszor vesz föl a q pozitív, negatív, illetve 0 értéket.

B Legyen $\dim \mathcal{V} = n$, és legyen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ két φ-ortog. bázis.
Legyen $\mathcal{B}$-ben q pozitív az első n_+ elemen, 0 a következő n_0 elemen, és negatív a maradék n_- elemen, $\mathcal{C}$-ben pedig ugyanez az (m_+, m_0, m_-) számokkal. Tegyük fel továbbá, hogy $n_+ \geqslant m_+$.
Ha $\mathcal{U} = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n_+})$ és $\mathcal{W} = \operatorname{span}(\mathbf{c}_{m_++1}, \ldots, \mathbf{c}_n)$, akkor $q(\mathbf{u}) > 0$ minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathcal{U}$-ra, és $q(\mathbf{w}) \leqslant 0$ minden $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$-re, így $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 0 \Rightarrow \mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.
De $n \geqslant \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} = n_+ + m_0 + m_- \geqslant m_+ + m_0 + m_- = n \Rightarrow n_+ = m_+$. Hasonlóan $n_- = m_-$, és így $n_0 = m_0$.

K Valós szimm. és komplex önadj. mátrixok szignatúrája egyértelmű.

Bilineáris függvények más test fölött

D K tetszőleges test, $\mathcal{V}_K$ vektortér, $\varphi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ bilineáris függvény

φ szimmetrikus, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

φ ferdén szimmetrikus vagy szimplektikus, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

φ alternáló, ha bármely $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vektorra $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$.

φ reflexív, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ és $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ esetén $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ (vagyis ha a merőlegesség szimmetrikus fogalom)

Á Minden alternáló bilineáris függvény szimplektikus, ugyanis $0 = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, amiből $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Mj Ha a K testben $1 + 1 \neq 0$, akkor visszafelé is igaz:

szimplektikus $\Rightarrow$ alternáló

Ha K-ban $1 + 1 = 0$, akkor viszont szimplektikus $=$ szimmetrikus.

P

1. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ szimmetrikus,
2. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ alternáló.

T Minden szimmetrikus vagy alternáló bilineáris függvény reflexív.

szimmetrikus $\Rightarrow$ reflexív: $0 = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

alternáló $\Rightarrow$ reflexív: Tfh $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) && \varphi \text{ alternáló} \\
&= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}) && \varphi \text{ bilineáris} \\
&= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) && \varphi \text{ alternáló} \\
&= \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) && \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ reflexív.

Mj Visszafelé is igaz: ha egy bilineáris függvény reflexív, akkor alternáló vagy szimmetrikus.