Bevezetés az algebrába 2

SVD: szinguláris felbontás

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Az SVD konstrukciója

Motiváció

Hogyan válasszunk bázist, ha a mátrix téglalap alakú? Mit tehetünk még, ha a mátrix nem diagonalizálható?

m A $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformációk ortogonális/unitér diagonalizálását fogjuk általánosítani $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezésekre. Ebben a részben végig

$$K = \mathbb{R} \text{ vagy } \mathbb{C}, \text{ és } \langle\ ,\ \rangle \text{ a standard skalárszorzat.}$$

Az $A \in K^{m\times n}$ mátrixhoz olyan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots, \mathbf{v}_n\} \subset K^n$ és $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset K^m$ ONB-okat keresünk, melyekben A mátrixa diagonális, azaz:

$A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, ahol $1 \leqslant i \leqslant \min(m, n)$

Á Ha a K^n-beli $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ vektorok legalább egyike az A^*A sajátvektora, akkor $A\mathbf{x} \perp A\mathbf{y}$

B $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$, $A^*A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \Rightarrow$
$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = (A\mathbf{x})^*A\mathbf{y} = \mathbf{x}^*A^*A\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, (\lambda\mathbf{y})\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$

A szinguláris felbontás konstrukciója

Á A^*A önadjungált, pozitív szemidefinit, $r(A)$ rangú mátrix.

B Önadjungált: $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$

Pozitív szemidefinit: $\mathbf{x}^*A^*A\mathbf{x} = |A\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$

A rangja $r(A)$: $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$, mert

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow A^*A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$
$$A^*A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow |A\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^*A^*A\mathbf{x} = 0 \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tehát $r(A^*A) = n - \dim \mathcal{N}(A^*A) = n - \dim \mathcal{N}(A) = r(A)$

K A^*A-nak van ortonormált sajátbázisa a

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_r > 0,\ \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

sajátérékekhez: $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

$|A\mathbf{v}_i|^2 = \mathbf{v}_i^*A^*A\mathbf{v}_i = \lambda_i|\mathbf{v}_i|^2 = \lambda_i$, így $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} > 0$-ra az $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}A\mathbf{v}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ vektorok ortonormált rendszert alkotnak K^m-ben.

D **Szinguláris értékek és vektorok**

Az r rangú $A \in K^{m\times n}$ mátrix szinguláris értékeinek nevezzük az A^*A pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeit ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$). Az A^*A mátrix valamely σ^2 sajátértékéhez tartozó egységnyi $\mathbf{v}$ sajátvektorát az A jobb szinguláris vektorának, az $\mathbf{u} = \frac{1}{\sigma}A\mathbf{v}$ egységvektort pedig a $\mathbf{v}$-hez tartozó bal szinguláris vektorának nevezzük.

$$\mathbf{v}_i \xrightarrow{A} \sigma_i\mathbf{u}_i$$

$$\sigma_i\mathbf{v}_i \xleftarrow{A^*} \mathbf{u}_i$$

ugyanis $A^*\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}A^*A\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sigma_i}\sigma_i^2\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i$.

Így $\mathbf{u}_i \in \mathcal{O}(A)$, és $\mathbf{v}_i \in \mathcal{O}(A^*) = \mathcal{S}(\overline{A})$. $(i = 1, \ldots, r)$,

és a dimenziók miatt

$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ONB-a $\mathcal{O}(A)$-nak és $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ONB-a $\mathcal{S}(\overline{A})$-nak.

P Határozzuk meg

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

szinguláris értékeit, és keressünk megfelelő ONB-t a sor és oszloptérben.

m $A^*A = \begin{bmatrix} 80 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$, $\rightsquigarrow \chi(x) = x^2 - 97x + 1296 \rightsquigarrow \lambda_1 = 81,\ \lambda_2 = 16$

$\rightsquigarrow \sigma_1 = 9,\ \sigma_2 = 4.$

A^*A sajátpárjai: $(81, \frac{1}{\sqrt{65}}(8,1), (16, \frac{1}{\sqrt{65}}(-1,8)).$

jobb szinguláris vektorok: $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{65}}(8,1)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{65}}(-1,8)$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{bmatrix} 36 \\ 63 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{bmatrix} 28 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{65}}(4,7)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{65}}(7,-4)$ a hozzájuk tartozó bal szinguláris vektorok.

D **Szinguláris felbontás (SVD = Singular Value Decomposition)**

$A \in K^{m\times n}$-hez $A = U\Sigma V^*$, ahol $V_{n\times n}$ és $U_{m\times m}$ unitér (valós esetben ortogonális), és $\Sigma_{m\times n}$ valós diagonális, monoton csökkenő nemnegatív diagonális elemekkel

T Minden $A \in K^{m\times n}$ ($K = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) mátrixnak létezik szinguláris felbontása, és ebben Σ egyértelmű.

B $A^*A \in K^{n\times n}$ önadjungált, pozitív szemidefinit

$\rightsquigarrow \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ sajátértékek, és hozzá $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ON sajátbázis

$\rightsquigarrow V = [\mathbf{v}_1|\ldots|\mathbf{v}_n]$ unitér, $AV = [\sigma_1\mathbf{u}_1|\ldots|\sigma_r\mathbf{u}_r|O] = [U_1\Sigma_1|O]$, ahol $\Sigma_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, és $U_1 = [\mathbf{u}_1|\ldots|\mathbf{u}_r] \in K^{m\times r}$ szemiunitér. $\rightsquigarrow$

U_1 kiegészíthető: $U = [U_1|U_2]$ unitérré, és $\Sigma = \begin{bmatrix}\Sigma_1 & O\\ O & O\end{bmatrix} \rightsquigarrow$

$$U\Sigma = [U_1|U_2]\begin{bmatrix}\Sigma_1 & O\\ O & O\end{bmatrix} = [U_1\Sigma_1|O] = AV \Rightarrow A = U\Sigma V^{-1} = U\Sigma V^*.$$

B Σ egyértelmű: $A = UDV^* \Rightarrow A^*A = VDU^*UDV^* = VD^2V^* \sim D^2$, tehát $d_1^2 \geqslant d_2^2 \geqslant \ldots$ az A^*A sajátértékei fogyó sorrendben, és $d_i \geqslant 0$, így $D = \Sigma$.

P Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását!

m $A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ A^*A sajátértékei: $2,\ 1,\ 0,$
A szing. értékei: $\sqrt{2},\ 1$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ AV = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D **Redukált szinguláris felbontás:**

$A = U_1 \Sigma_1 V_1^*$, ahol V_1, U_1 szemiunitér (valós esetben szemiortogonális), Σ_1 négyzetes diagonális pozitív főátlóval, fogyó diagonális elemekkel. Σ_1 egyértelmű.

T Minden $A \in K^{m \times n}$-nek van $A = U_1 \Sigma_1 V_1^*$ redukált szinguláris felbontása, ahol $U_1 \in K^{m \times r}$ és $V_1 \in K^{n \times r}$, és Σ_1 átlójában az A szinguláris értékei állnak fogyó sorrendben.

B Láttuk, hogy van teljes SVD-felbontás. Ha U-ban és V-ben is leválasztjuk az első r oszlopot: $U = [U_1 | U_2]$ és $V = [V_1 | V_2]$, továbbá $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}$, akkor

$$A = [U_1 | U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 * \\ \hline V_2^* \end{bmatrix} = [U_1 \Sigma_1 | O] \begin{bmatrix} V_1 * \\ \hline V_2^* \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^*.$$

Ebből az is látszik, hogy a redukált SVD kibővíthető a fenti módon teljessé, és Σ egyértelmű, így Σ_1 is az.

D SVD diadikus alakja: $A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^* + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^*$

Mj Általában érdemes a redukált felbontást kiszámítani (először): Ehhez elég a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ vektorokat meghatározni, és az AV_1 oszlopainak lenormálásával megkapjuk az U_1-et, mindenféle ortogonális kiegészítés nélkül. Ha mégis kell a teljes felbontás, ahhoz tetszőleges olyan V és U megfelel, amit a V_1 és U_1 unitér/ortogonális kiegészítéseként kapunk.

P $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^*A = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ sajátértékei 25 és 0.

Csak a $\neq 0$ sajátértékekhez kell a sajátvektor. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$AV = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [5] \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$

U és V kibővítésével: $A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ teljes SVD-felbontás.

SVD kiszámítása

P Számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris értékeit, és írjuk fel a szinguláris felbontását!

m $A^*A = \begin{bmatrix} 20 & -14 & 4 \\ -14 & 17 & -10 \\ 4 & -10 & 8 \end{bmatrix}.$

$k(x) = x^3 - 45x^2 + 324x$, gyökei 36, 9, 0 $\rightsquigarrow$ a szing. ért.: 6, 3 (0)

\- A^*A egységnyi sajátvektorai:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 36 & \sigma_1 = 6 & \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1) \\ \lambda_2 = 9 & \sigma_2 = 3 & \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2) \\ \lambda_3 = 0 & & (\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)). \end{array}$$

$$AV_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, U_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = U_1 \Sigma V_1^* = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ redukált SVD}$$

U_1, V_1 kiegészítéséhez $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ és $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vagy a negatívjuk megfelel:

$$A = U \Sigma V^* = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

teljes SVD.

A (redukált) szinguláris felbontás diadikus alakja:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

P Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ szinguláris érték szerinti felbontását!

m $A^*A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, karakterisztikus polinomja $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$
A szinguláris értékei $\sqrt{3}$ és 1. A hozzájuk tartozó egységnyi hosszú sajátvektorok $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$, Így

$$V = V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ AV = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ r. SVD}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \text{ teljes SVD}$$

Ha a mátrix rangja 1:

P Határozzuk meg a következő mátrix teljes és redukált szinguláris felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

m A mátrix első sorát $1+\mathrm{i}$-vel szorozva a második sort kapjuk, tehát $\mathcal{S}(A) = \operatorname{span}((1, 1-\mathrm{i})) \Rightarrow \mathcal{O}(A^*) = \overline{\mathcal{S}(A)} = \operatorname{span}((1, 1+\mathrm{i}))$.

$\mathbf{v}_1$ az A^*A-nak nemnulla sé-ű svektora $\Rightarrow \mathbf{v}_1 \in \mathcal{O}(A^*A) = \mathcal{O}(A^*)$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1+\mathrm{i})$. Felhasználva az $A\mathbf{v}_1 = \sigma_1\mathbf{u}_1$ képletet $\sigma_1 = 3$, ui.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3+3\mathrm{i} \end{bmatrix} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}\right) = 3\mathbf{u}_1$$

SVD: $$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Ha a mátrix normális:

Á Ha a mátrix normális, az unitér diagonalizálásából a szinguláris felbontás megkapható. Ha a mátrix önadj. pozitív szemidefinit, akkor van olyan sajátfelbontása, mely egyúttal szinguláris felbontás is!

P Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ szinguláris felbontását!

m A sajátpárjai a sajátértékek abszolút értékének csökkenő sorrendjében: $(2, \frac{1}{\sqrt{3}}(1-\mathrm{i}, 1))$, $(-1, \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\mathrm{i}, -2)) \rightsquigarrow$ sajátfelbontás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

A negatív sajátértéket és egy hozzá tartozó sajátvektort -1-gyel szorozva SVD-t kapunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Általában egy normális mátrix $A = UDU^*$ sajátfelbontásából (ahol D-ben a sajátértékek az abszolút értékek csökkenő sorrendjében vannak) SVD-t kapunk, ha a $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mátrixot $\Sigma D_0 = \operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|) \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ szorzatra bontjuk, ahol $\varepsilon_i = \lambda_i / |\lambda_i|$, ha $\lambda_i \neq 0$, és 1 különben. $\Rightarrow$ $D_0 U^*$ is unitér.

P Hogyan lehet az alábbi felbontásból SVD-felbontást csinálni?

$$A = UDV^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m $D = D_1 D_2 = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, ahol az első unitér, de a második még nem jó Σ-nak. Az első két sort és az első két oszlopot megcseréljük egy-egy permutációmátrixszal való szorzással:

$$D_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = P_1 \Sigma P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$A = (UD_1P_1)\Sigma(P_2V^*)$.

A vagy A^* SVD-felbontása?

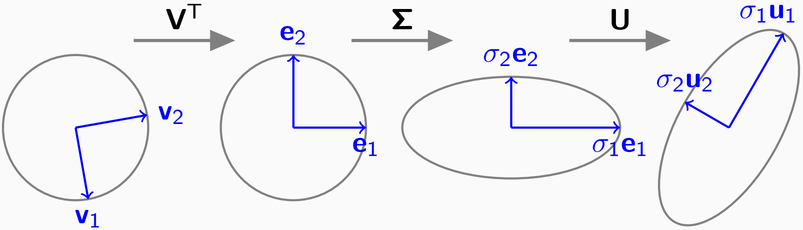
Ha $A = U_1\Sigma_1 V_1^* = U\Sigma V^*$ az A redukált és teljes SVD felbontása, akkor

$A^* = V_1\Sigma_1 U_1^* = V\Sigma^T U^*$ szintén SVD-felbontások.

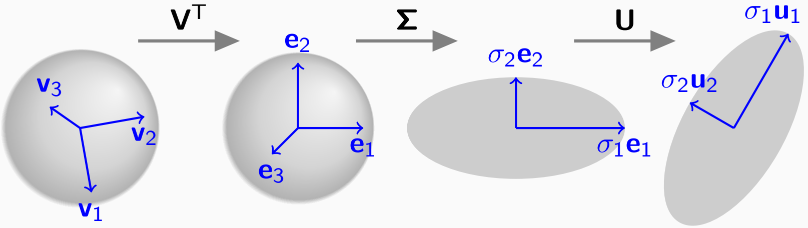
Tehát ha az $A \in K^{m\times n}$ mátrixra $m < n$, akkor érdemesebb az A^* redukált SVD-felbontását kiszámítani, mert a sajátértékek és sajátvektorok keresésénél akkor a kisebb méretű AA^* mátrixszal kell számolni.

Szinguláris felbontás geometriai interpretációja

Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$ 2×2-es 2 rangú



Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$ 2×3-as 2 rangú



Az SVD alkalmazásai

D Polárfelbontáson egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális mátrix szorzatára való felbontását értjük.

T **Polárfelbontás SVD-ből**

Bármely komplex (valós) négyzetes A mátrix előáll

$$A = PQ$$

alakban, ahol P pozitív szemidefinit önadjungált (szimmetrikus) mátrix, Q pedig unitér (ortogonális). Ha A invertálható, akkor P pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

Mj 1×1-es mátrixokra ez a komplex számok trigonometrikus alakja.

Mj Egy $A = PQ$ polárfelbontás a determinánsokra az $|A| = |P| \cdot |Q| = r\varepsilon$ trigonometrikus alakra bontást adja, ugyanis ha P pozitív szemidefinit, akkor $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$, és ha Q unitér, akkor $|Q| = \varepsilon$-ra $|\varepsilon| = 1$.

B $A = U\Sigma V^* = U\Sigma U^* UV^* = (U\Sigma U^*)(UV^*)$, ahonnan $P = U\Sigma U^*$, $Q = UV^*$.

P önadjungált, mert önadjungáltnak unitérrel vett konjugáltja.

P pozitív szemidefinit, mert kongruens a pozitív szemidefinit Σ mátrixszal (ha A invertálható, akkor Σ pozitív definit)

Q unitér (ortogonális), mert két unitér (ortogonális) mátrix szorzata.

P egyértelmű (nemcsak akkor, ha pozitív definit), ugyanis

$$AA^* = PQQ^*P^* = PP^* = P^2,$$

azaz $P = \sqrt{AA^*}$, és pozitív szemidefinit önadjungált mátrix négyzetgyöke egyértelmű az önadjungált pozitív szemidefinit mátrixok körében.

Ha P pozitív definit, akkor invertálható, így $Q = P^{-1}A$ is egyértelmű.

Mj Fordított sorrend: azonos unitér (ortogonális) mátrixszal:

$$A = U\Sigma V^* = UV^*V\Sigma V^* = (UV^*)(V\Sigma V^*) = Q\hat{P},$$

Mj Valós polárfelbontás geometriai jelentése: minden $\mathbb{R}^3$-beli mátrixleképezés két olyan leképezés kompozíciója, amelyekből az egyik forgatja vagy forgatva tükrözi a teret (Q), a másik pedig egy ortonormált bázis tengelyei mentén nyújtja/összenyomja a teret minden tengelyirányban egy-egy nemnegatív tényezővel.

P Számítsuk ki az A mátrix polárfelbontásait!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

B $P = U\Sigma U^*$, $Q = UV^*$, $\hat{P} = V\Sigma V^*$ ($\to$ 10. oldal)

$$\begin{aligned} A = PQ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = Q\hat{P} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

T **Pszeudoinverz SVD-ből**

A valós mátrix és $A = U_1\Sigma_1 V_1^T = U\Sigma V^T$ redukált/teljes SVD.
Ekkor $A^+ = V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T = V\Sigma^+U^T$,
ahol Σ^+ diag., első r diag. eleme $1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r$, a többi 0.

B Mivel U_1, V_1 teljes oszloprangú szemiortogonális, U, V pedig ortogonális, $U_1^TU_1$, $V_1^TV_1$, U^TU, V^TV mind egységmátrix $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{lll} A = U_1\Sigma_1V_1^T & \text{és} & A = U\Sigma V^T \\ A' = V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T & \text{és} & A'' = V\Sigma^+U^T \end{array}\right\}\text{-ra}$$

$AA'A = U_1\Sigma_1\Sigma_1^{-1}\Sigma_1V_1^T = U_1\Sigma_1V_1^T = A$, és
$AA''A = U\Sigma\Sigma^+\Sigma V^T = U\Sigma V^T = A$.
$A'AA' = V_1\Sigma_1^{-1}\Sigma_1\Sigma_1^{-1}U_1^T = V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T = A'$, és
$A''AA'' = V\Sigma^+\Sigma\Sigma^+U^T = V\Sigma^+U^T = A''$. Továbbá
$AA' = U_1U_1^T$ és $A'A = V_1V_1^T$ szimmetrikusak, és
$A''A = V\Sigma^+\Sigma V^T$ és $AA'' = U\Sigma\Sigma^+U^T$ is azok, mert
szimmetrikusnak ortogonálissal vett konjugáltjai.

Mj Az $A = \sum \sigma_i \mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^*$ diadikus felbontásra $A^+ = \sum \frac{1}{\sigma_i}(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^*)^*$.

P Számítsuk ki az előző feladat mátrixának pszeudoinverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

m Az A mátrix redukált szinguláris felbontása

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

amiből a pszeudoinverzet megadó $A^+ = V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T$ képlettel

$$A^+ = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Mj Vegyük észre, hogy A^+-nak ez nem a szinguláris felbontása, de a diadikus alakból az is könnyen megkapható a tagok átrendezésével.

D **Frobenius-norma**

Az $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

T **Frobenius-norma ekvivalens alakjai**

$$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\operatorname{r}(A)} \sigma_i^2}.$$

B $A^* A$ átlójának j-edik eleme éppen $|A_{*j}|^2 \Rightarrow$
$\operatorname{tr}(A^* A) = \sum_j |A_{*j}|^2 = \|A\|_F^2$.
$\operatorname{tr}(A^* A) = \sum_i \lambda_i = \sum_i \sigma_i^2$

Alacsony rangú approximáció

T **Eckart–Young-tétel**

Legyen A r-rangú, $k \leqslant r$, $A^{(k)} := \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^* = U^{(k)} \Sigma^{(k)} (V^{(k)})^*$, ahol $U^{(k)}$ az U_1 (vagy U) első k oszlopából, $(V^{(k)})^*$ a V_1^* (vagy V^*) első k sorából áll, és $\Sigma^{(k)}$ a Σ_1 (vagy Σ) bal fölső $k \times k$-as sarokmátrixa. Ekkor $A^{(k)}$ az A mátrix legjobb legföljebb k-rangú közelítése, azaz $\min_{r(B) \leqslant k} \|A - B\|_F = \left\|A - A^{(k)}\right\|_F$,
és a közelítés hibája $\left\|A - A^{(k)}\right\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2}$.

B Most csak a hibát bizonyítjuk.

Legyen $\Sigma' = \begin{bmatrix} \Sigma^{(k)} & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n}$. Ekkor $A = U\Sigma V^*$ és $A^{(k)} = U\Sigma' V^*$.

$$\left\|A - A^{(k)}\right\|_F^2 = \|U(\Sigma - \Sigma')V^*\|_F^2 = \operatorname{tr}(V(\Sigma - \Sigma')^T U^* U(\Sigma - \Sigma')V^*) = \operatorname{tr}(V(\Sigma - \Sigma')^T(\Sigma - \Sigma')V^{-1}) = \operatorname{tr}\left((\Sigma - \Sigma')^T(\Sigma - \Sigma')\right) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \sigma_{k+1}^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots)\right) = \sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_r^2.$$

P Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix SVD felbontását és legjobb $\leqslant 1$ rangú közelítését!

m A szimm. $\Rightarrow$ az SVD felbontás megkapható ortogonális diagonalizációval.

$k_A(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1) \rightsquigarrow \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 1,$

$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = U$.

$$A = V \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [6] \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{5} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24/5 & 12/5 \\ 12/5 & 6/5 \end{bmatrix}$$

A közelítés hibája $\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1 = \sigma_2$.

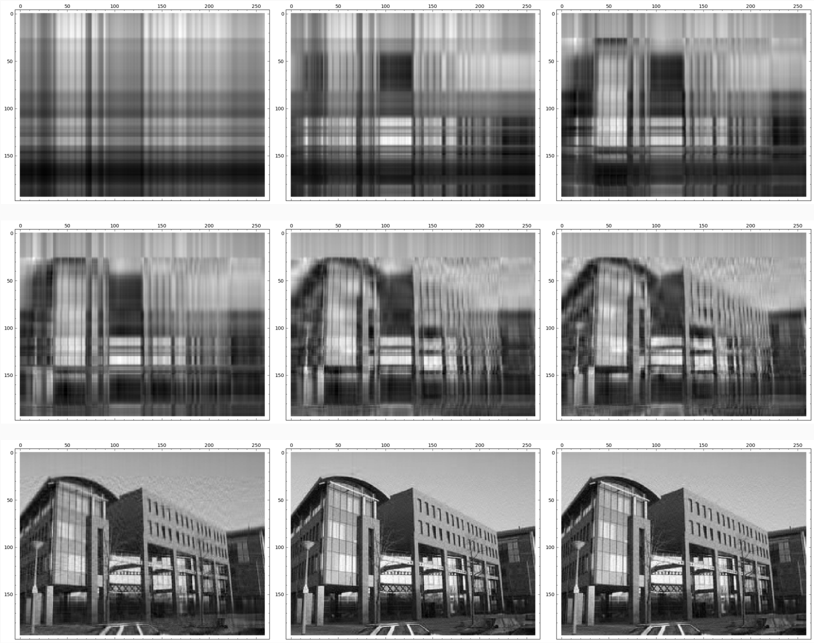
Az alacsony rangú közelítés egyik alkalmazása: képek tömörítése.

P Szürkeárnyalatos kép, a pixelek sötétsége $[0,1]$-beli szám

$n \times n$-es mátrix legföljebb $n/4$ rangú közelítése SVD felbontásban tárolva:

$\leqslant \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{4}$ szám az n^2 szám helyett.

1, 2, 3, 4, 8, 12, 40, 97, 194.



P Adjuk meg az alábbi A mátrix redukált és teljes SVD felbontását, diadikus SVD felbontását, polárfelbontását, pszeudoinverzét és legföljebb 1 rangú közelítését!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

m $A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}$

$k_{A^*A} = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 5-x & -10 \\ 0 & -10 & 20-x \end{vmatrix} = -(x-1)(x^2-25x) =$
$-(x-25)(x-1)x$

A^*A poz. sé-ei: $\begin{aligned} \lambda_1 &= 25 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$ $\quad$ A szing. értékei: $\begin{aligned} \sigma_1 &= 5 \\ \sigma_2 &= 1 \end{aligned}$

Sajátvektorok:

$\lambda_1 = 25$-höz:

$$\begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -10 \\ 0 & -10 & -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1\text{-hez: } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & -10 & 19 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AV_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot V_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ -5 & 0 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5} \qquad 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\text{-ra}$$

Red. SVD: $\quad A = U_1\Sigma_1 V_1^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Diadikus SVD: $\quad 5 \cdot \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + 1 \cdot \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* =$

$$5 \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teljes SVD:

$$A = U\Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

az U_1 és V_1^* tetszőleges ortogonálissá való kiegészítésével.

Polárfelbontás a teljes SVD-ből:

$$A = U\Sigma V^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = U\Sigma U^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Q = UV^* \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = PQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mj A polárfelbontás P-je a redukált felbontásból is kiszámítható: $P = U\Sigma U^* = U_1\Sigma_1 U_1^*$, csak Q-hoz kell a teljes felbontás.

Pszeudoinverz a redukált felbontásból:

$$A^+ = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Legjobb 1 rangú közelítés red. SVD-ből vagy, még könnyebben, diadikus SVD-ből az első k tag, ha $\leqslant k$ rangú közelítés kell:

$$5 \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Hibája: $\sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots} = \sigma_2 = 1$, amúgy is jól látható.

F Egyértelmű-e a legjobb k rangú közelítés?

m Nyilván nem, ha az adott rang pont egy többszörös szinguláris értékbe metsz bele.

Pl. I-nek legjobb 1 rangú közelítése az $[\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{0} \mid \ldots]$ mellett bármely $[\mathbf{0} \mid \ldots \mid \mathbf{e}_i \mid \mathbf{0} \mid \ldots]$ mátrix is (ugyanúgy $\sqrt{n-1}$ a hibája, és egyébként kijön az $I = PIP^T$ felbontásból, ahol P az $\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \mathbf{e}_i$ permutációmátrix), de sok más ilyen hibájú közelítést is kaphatunk.

F Számítsuk ki az I_2 mátrix QIQ^T felbontásból adódó 1 rangú közelítésének a hibáját, ahol $Q = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Mj Ha az SVD-felbontás diadikus alakjában összevonjuk az azonos szinguláris értékhez tartozó tagokat, akkor ugyanúgy egyértelmű felírást kapunk, mint a diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontásánál.

? A spektrálfelbontás tulajdonságait hogyan lehet általánosítani erre a felbontásra?