Bevezetés az algebrába 2

Minimálpolinom

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Mátrixok polinomjai

Á $A, B \in K^{n\times n}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k \in K[x]$.

$$A \sim B \;\Rightarrow f(A) \sim f(B).$$

B $B = P^{-1}AP \Rightarrow B^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP \Rightarrow$
$f(B) = \sum_{k=0}^{m} c_k B^k = \sum_{k=0}^{m} c_k P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k A^k\right)P =$
$P^{-1}f(A)P$.

K Ha A diagonalizálható, azaz $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$,

akkor $A = PDP^{-1}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)P^{-1}$

$$\Rightarrow f(A) = Pf(D)P^{-1} = P\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}P^{-1},$$

Mj Ha A diagonalizálható, különböző sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, akkor a spektrálfelbontásból $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \Rightarrow f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) P_i$

Á $A \in K^{n\times n} \Rightarrow \; \exists 0 \neq f(x) \in K[x]: \quad f(A) = O$.

B $I, A, A^2, \ldots A^{n^2} \in K^{n\times n}$, $\dim K^{n\times n} = n^2$, ezért lineárisan összefüggők $\Rightarrow$ valamely lineáris kombinációjuk O:

$$c_{n^2} A^{n^2} + \ldots + c_1 A + c_0 I = f(A) = O.$$

Mj Sokkal kisebb fokú ilyen polinom is létezik (Cayley–Hamilton-tétel) Speciálisan:

Á Ha $A \in K^{n\times n}$ diagonalizálható, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a kül. sajátértékei, akkor $f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)$-re $f(A) = O$.

B $\forall \lambda$ sajátértékre $f(\lambda) = 0$, így

$$\begin{aligned} f(A) &= P\, f(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n))\, P^{-1} \\ &= P\, \operatorname{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n))\, P^{-1} = O. \end{aligned}$$

Polinommátrixok = mátrixegyütthatós polinomok

Á Az $A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \in K[x]^{n\times n}$ polinommátrix
felírható $A_k x^k + A_{k-1}x^{k-1} + \ldots + A_1 x + A_0$ alakban
(ahol $k \in \mathbb{N}$ az a_{ij} fokainak maximuma),
azaz $K[x]^{n\times n} = K^{n\times n}[x]$

Mj A mátrixszorzás nem kommutatív, így ez egy nem kommutatív gyűrű fölötti polinomgyűrű. (Úgy tekintjük, hogy x fölcserélhető a gyűrű elemeivel, így a polinomok szorozhatók és kanonikus alakra hozhatók).

P $\begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ x^2-1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

T **Cayley–Hamilton-tétel**

Ha A tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $k_A(x)$, akkor $k_A(A) = O$.

B Az A karakterisztikus polinomja
$\det(A - xI) = k_A(x) = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.
Tudjuk: $(A - xI)\,\mathrm{adj}(A - xI) = \det(A - xI)I = k_A(x)I$.
$A - xI$ bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns x egy legföljebb $n-1$-edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű A_0, A_1,..., A_{n-1} mátrixok, hogy

$$\mathrm{adj}(A - xI) = x^{n-1}A_{n-1} + \ldots + xA_1 + A_0.$$

$$\begin{aligned}(A - xI)\,\mathrm{adj}(A - xI) &= (A - xI)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k A_k\right)\\ &= AA_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k (AA_k - A_{k-1})\right) - x^n A_{n-1}.\end{aligned}$$

Együttható-összehasonlítás:

$$\begin{array}{rrcl}
 & k_A(x)I & = & AA_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k (AA_k - A_{k-1})\right) - x^n A_{n-1} \\
 & c_0 I & = & AA_0 \\
A\cdot & c_1 I & = & AA_1 - A_0 \\
A^2\cdot & c_2 I & = & AA_2 - A_1 \\
\vdots & & & \\
A^{n-1}\cdot & c_{n-1} I & = & AA_{n-1} - A_{n-2} \\
A^n\cdot & (-1)^n I & = & -A_{n-1}
\end{array}$$

A beszorzás után kapott egyenlőségeket összeadva

$$k_A(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + c_1 A + c_0 I = O.$$

K $\forall$ invertálható $A \in K^{n\times n}$ mátrixhoz $\exists q \in K[x]_n$ (legf. $n-1$-edfokú): $A^{-1} = q(A)$.

P Ellenőrizzük a Cayley–Hamilton-tétel állítását az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixra. Fejezzük ki A inverzét A polinomjaként!

m $k_A(x) = x^2 - 5x - 2$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

$$k_A(A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A^2 - 5A - 2I = O \Rightarrow$

$$A - 5I - 2A^{-1} = o \Rightarrow A^{-1} = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{5}{2}I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Minimálpolinom

D **Minimálpolinom**

$m_A(x) \in K[x]$ az $A \in K^{n\times n}$ mátrix minimálpolinomja, ha $m_A(A) = O$, $m_A(x)$ főegyütthatója 1 (azaz $m_A(x)$ normált), és $m_A(x)$ a legkisebb fokú ilyen polinom.

Mj A Cayley–Hamilton-tétel miatt $\exists m_A(x)$, és $\deg m_A(x) \leqslant n$.

D Az $f(x)$ polinom annullálja A-t (annullátora A-nak), ha $f(A) = O$.

Mj $\deg m_A(x) \geqslant 1$, mert a 0 nem normált polinom, egy nulladfokú $f(x) = c$ polinomra pedig $f(A) = cI \neq O$.

P $m_I(x) = x - 1, \quad m_O(x) = x$

m $A \sim B \Rightarrow m_A = m_B$ (ugyanis $f(A) \sim f(B)$, így minden f polinomra $f(A)$ és $f(B)$ egyszerre O vagy nem O).

D (A minimálpolinom invariáns a mátrixok hasonlóságára, így) egy véges dimenziós $\mathcal{V}_K$ vektortéren értelmezett $f : \mathcal{V}_K \to \mathcal{V}_K$ lineáris transzformáció minimálpolinomján azt a minimális fokszámú $m(x)$ normált polinomot értjük, amelyre $m(f) = O$.

T **A minimálpolinom tulajdonságai**

$A \in K^{n \times n}$.

(1) A-nak pontosan egy m_A minimálpolinomja van.

(2) Bármely $f(x)$ polinomra $f(A) = O \iff m_A(x) \mid f(x)$.

(3) $m_A(x) \mid k_A(x)$

(4) A minden sajátértéke gyöke $m_A(x)$-nek.

B (1) Tfh f és g két különböző minimális fokszámú normált polinom, melyekre $f(A) = g(A) = O \Rightarrow f - g$ kisebb fokú annullátor $\Rightarrow$ $f - g = 0$.

(2.) $\Leftarrow$: Nyilván.

$\Rightarrow$: $f(A) = O$ és $f(x) = m_A(x)q(x) + r(x)$ maradékos osztás $\Rightarrow$ $O = f(A) = m_A(A)q(A) + r(A) = r(A)$, de $\deg r < \deg m_A \Rightarrow r = 0$.

(3) A 2. és a Cayley–Hamilton-tétel következménye.

(4) $(\lambda, \mathbf{v})$ sajátpár $\Rightarrow A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ $(k \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow m_A(A)\mathbf{v} = m_A(\lambda)\mathbf{v}$, de $m_A(A) = O$, és $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow m_A(\lambda) = 0$.

K Ha $k_A(x) = (-1)^n \prod_i (x - \lambda_i)^{a_i}$, akkor a (3) és (4) miatt $m_A(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{b_i}$, ahol $1 \leqslant b_i \leqslant a_i$, és a_i a λ_i algebrai multiplicitása.

Mj Ha $K \leqslant L$ testek, és $A \in K^{n\times n}$, akkor A K fölötti minimálpolinomja megegyezik az L fölöttivel, tehát a minimálpolinom nem függ attól, hogy A-t milyen test fölöttinek tekintjük.

B A K fölötti min. pol. annullálja A-t, így az L fölötti ennek osztója. Viszont ha $I, A, A^2, \ldots, A^k$ lineárisan összefüggők L fölött, akkor a Gauss-elimináció miatt K fölött is van O-t adó nemtriviális lin. kombinációjuk.

Á Ha $A \in K^{n\times n}$ diagonalizálható K fölött, és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az A összes különböző sajátértéke, akkor $m_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$

B Láttuk korábban, hogy ez annullátora A-nak. Másrészt minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, így k-nál kisebb fokú annullátor nincs.

D A nilpotens, ha $\exists k$: $A^k = O$.

P Lássuk be, hogy ha $A \in K^{n \times n}$ nilpotens, akkor $A^n = O$.

B $\exists k$: $A^k = O \Rightarrow x^k$ annulláló polinom $\Rightarrow m_A(x) \mid x^k \Rightarrow m_A(x) = x^\ell$ valamely ℓ-re.

Továbbá $\deg m_A(x) \leqslant n$, tehát $m_A(x) \mid x^n \Rightarrow A^n = O$.

P Mi az alábbi A mátrix karakterisztikus és minimálpolinomja?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M $k_A(x) = (x-1)^3(x-2) \Rightarrow m_A(x) = (x-2)(x-1)^k$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ lehet csak. Az $(A-2I)$, $(A-2I)(A-I)$, $(A-2I)(A-I)^2$ szorzatokat egymás utáni szorzásokkal tudjuk ellenőrizni.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Így $m_A(x) = (x-2)(x-1)^2$.

P Van-e olyan A 2×2-es valós, illetve racionális mátrix, amelyre $A^5 = I$, de $A \neq I$?

m Az A mátrixot annullálja az $x^5 - 1$ polinom, így $m_A(x) \mid x^5 - 1$.

$\mathbb{Q}$ fölött $x^5 - 1 = (x-1)\Phi_5(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, irreducibilisekre bontása, tehát $m_A(x)$ ezek közül valahány irred. tényező szorzata.

Viszont $\deg m_A(x) \leqslant \deg k_A(x) = 2$, ezért $m_A(x) = x - 1$ lehet csak, de akkor $A = I$, ellentmondás.

$\Rightarrow$ Nincs ilyen $\mathbb{Q}$ fölötti mátrix, viszont $\mathbb{R}$ fölötti van, például az origó körüli $\frac{2\pi}{5}$ szögű forgatás mátrixa.

P Határozzuk meg a k_A, m_A, k_B és m_B polinomokat!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M $k_A(x) = m_A(x) = x^6$, $k_B(x) = x^6$, $m_B(x) = x^3$, ugyanis

$A: \ \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}_{i-1}$ $(i \geqslant 2)$ és $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$

$B: \ \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}_{i-2}$ $(i \geqslant 3)$ és $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{0}$ $(i \leqslant 2)$

Valójában $B = A^2$, így abból, hogy $A^6 = O$, de $A^5 \neq O$, következik, hogy $B^3 = A^6 = 0$, de $B^2 = A^4 \neq 0$.

T Kísérőmátrix létezése

Minden $f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0 \in K[x]$ polinomhoz $\exists A \in K^{n \times n}$, hogy $m_A(x) = f(x)$, és így $k_A(x) = (-1)^n f(x)$.

B Kell: $f(x)$ annullátora A-nak, azaz $f(A) = O$, vagyis

$$f(A)\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad \forall i \tag{$*$}$$

de kisebb fokú polinom nem annullál. Ez utóbbihoz elég:

$$\text{valamely } \mathbf{v}\text{-re} \qquad \mathbf{v},\ A\mathbf{v},\ A^2\mathbf{v}, \ldots,\ A^{n-1}\mathbf{v} \quad \text{ftln.} \tag{$**$}$$

Vegyük észre: $\mathbf{v} \overset{A}{\mapsto} A\mathbf{v} \overset{A}{\mapsto} A^2\mathbf{v} \overset{A}{\mapsto} \cdots \overset{A}{\mapsto} A^{n-1}\mathbf{v}$

A (**) feltétel megvalósítható, mert egy bázison tetszőlegesen előírhatjuk a lineáris transzformációt (a mátrix oszlopait)

Legyen $\mathbf{e}_1 \overset{A}{\mapsto} \mathbf{e}_2 \overset{A}{\mapsto} \cdots \overset{A}{\mapsto} \mathbf{e}_n$, és

$A\mathbf{e}_n = A^n\mathbf{e}_1 = \sum_{k=0}^{n-1} -c_k A^k \mathbf{e}_1 = \sum_{k=0}^{n-1} -c_k \mathbf{e}_{k+1}$, hogy $f(A)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ legyen.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Ezt a mátrixot hívjuk az $f(x)$ polinom kísérő mátrixának.

Láttuk, hogy $f(A)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$. Másrészt minden $1 \leqslant i \leqslant n-1$-re $f(A)\mathbf{e}_{i+1} = f(A)A^i\mathbf{e}_1 = A^i f(A)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, tehát $f(A) = 0$. $\Rightarrow$ $f(x)$ annullálja az A mátrixot,

Kisebb fokú nem lehet a minimálpolinom, mert $I\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_1, \dots, A^{n-1}\mathbf{e}_1$, azaz $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ lineárisan függetlenek.

A karakterisztikus polinom többszöröse a minimálpolinomnak, de n-nél nagyobb fokú nem lehet, így $f(x)$ konstansszorosa.

F (Freud–Gyarmati: Számelmélet 1.6.28) n rozmár ül egy kerek asztal körül, mindegyik előtt egy érme. Mindegyik megnézi a jobb szomszédja előtti érmét. Ha az fej, vezényszóra megfordítja a sajátját! Ezt addig folytatják, míg van változás. Milyen n-re igaz, hogy a játék bármely kezdeti állapot esetén véget ér?

m $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$, $x_i = 0$, ha írás, $x_i = 1$, ha fej.

Pozitív körüljárás szerint indexelve egy lépés egy lineáris $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$ transzformációt ad, melynek a mátrixa is $A \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$:

$$x_1 \to x_1 + x_2$$
$$x_2 \to x_2 + x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n \to x_n + x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A k-adik lépés eredménye $A^k\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{x}\text{-re véget ér} &\iff \forall \mathbf{x}\, \exists k:\ A^k\mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\iff \forall i\, \exists k_i:\ A^{k_i}\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \\
&\iff \exists k\, \forall i:\ A^{k}\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (k = \max k_i) \\
&\iff \exists k:\ A^k = O \\
&\iff \exists k:\ m_A(x) \mid x^k \quad (\text{minden sajátérték } 0) \\
&\iff k_A(x) = (-x)^n = x^n \quad (\mathbb{Z}_2\text{-ben vagyunk})
\end{aligned}$$

$$k_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$(1-x)(1-x)^{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot 1 = (x+1)^n + 1$$

Milyen n-re lesz $(x+1)^n + 1 = x^n$, azaz $(x+1)^n = x^n + 1$?

Ha $n = 2^a$, akkor $(x+1)^{2^a} = (x^2+1)^{2^{a-1}} = \cdots = x^{2^a} + 1$.

Ha $n = 2^a m$, $m > 1$, $2 \nmid m$, akkor
$(1+x)^{2^a m} = (1+x^{2^a})^m = 1 + mx^{2^a} + \ldots + x^{2^a m} \neq x^{2^a m} + 1$.

Tehát pontosan a 2-hatvány n-ekre ér mindig véget a játék.

Invariáns alterek

D **Invariáns altér**

Az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció invariáns altere (illetve $\mathcal{V}$-nek f-invar. altere), ha minden $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ vektorra $f(\mathbf{u}) \in \mathcal{U}$.

D $A \in K^{n\times n}$-re $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V} = K^n$ invariáns altere A-nak (vagy $\mathcal{V}$ A-invariáns altere), ha invariáns altere az $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ transzformációnak.

Mj Ezt nyilván elegendő ellenőrizni az $\mathcal{U}$ egy generátorrendszerén.

P Tekintsük az $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \operatorname{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altere az f lineáris transzformációnak.

m $A\mathbf{u} = (1, -2, 3, -2)^T$, $A\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)^T$

Elég megmutatni Gauss-eliminációval, hogy az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid A\mathbf{u} \mid A\mathbf{v}]$ mátrix második felében nincs bázisoszlop.

(Megmutathatjuk egyúttal azt is, hogy a vektorok és a képeik között mi a lineáris kapcsolat.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

azaz $A\mathbf{u} = \frac{4}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.

Mj Egy A-invariáns altér nyilván invariáns A minden hatványára, így A minden polinomjára nézve is.

F Igazoljuk, hogy ha A és B felcserélhetők, azaz $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-nek invariáns altere!

m Ha $\mathcal{V}_\lambda = \{\mathbf{x} \in K^n : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$, akkor
$A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v} = (BA)\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B(\lambda\mathbf{v}) = \lambda B\mathbf{v} \Rightarrow B\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$

F Az f lin.transzformáció minden polinomjának magtere és képtere f-invariáns (vagy mátrixosan: a négyzetes A mátrix minden polinomjának nulltere és oszloptere A-invariáns).

m Legyen $p(x) \in K[x]$, $A \in K^{n\times n}$. Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(p(A))$, azaz $p(A)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow$
$p(A)(A\mathbf{v}) = p(A)A\mathbf{v} = Ap(A)\mathbf{v} = A\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow A\mathbf{v} \in \mathcal{N}(p(A))$

Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{O}(p(A))$, azaz $\exists\mathbf{u} : \mathbf{v} = p(A)\mathbf{u} \Rightarrow$
$A\mathbf{v} = Ap(A)\mathbf{u} = p(A)A\mathbf{u} \in \mathcal{O}(p(A))$

J Egy $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ vektortérre és a $\mathcal{V}_1$ és $\mathcal{V}_2$ alterek $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ bázisára $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot\sqcup \mathcal{B}_2$ a $\mathcal{V}$-nek az (rendezett) bázisa, ahol először a $\mathcal{B}_1$ elemei következnek az eredeti sorrendben, majd a $\mathcal{B}_2$ elemei.

T **Blokkháromszög mátrix és az invariáns altér**

Legyen az $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformációnak $\mathcal{U}$ invariáns altere. Ekkor f mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & * \\ O & * \end{bmatrix} \quad \text{alakú}$$

a $\mathcal{V}$ minden olyan $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot{\sqcup} \mathcal{B}_2$ bázisában, ahol $\mathcal{B}_1$ az $\mathcal{U}$ egy bázisa.

B A $\mathcal{B}_1$ elemeinek a képe span$(\mathcal{B}_1)$-ben van, tehát a koordinátavektoruk $\mathcal{B}_2$-höz tartozó része $\mathbf{0}$.

P Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixnak az $\mathcal{U} = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \leqslant \mathbb{R}^4$ tér invariáns altere.

T **Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek**

Legyen az $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. transzf. két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor f mátrixa minden $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot{\sqcup} \mathcal{B}_2$ bázisban

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$$ alakú, ahol $\mathcal{B}_1$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{W}$ egy bázisa.

B $\mathcal{B}_1$ elemeinek képe span($\mathcal{B}_1$)-ben van, $\mathcal{B}_2$ elemeié span($\mathcal{B}_2$)-ben, ezért az elsőknek az alsó része, a másikaknak a felső része $\mathbf{0}$.

Mj Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor a transzformáció mátrixa blokkdiagonális alakú minden $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot{\sqcup} \ldots \dot{\sqcup} \mathcal{B}_k$ bázisban.

Mj Könnyű belátni, hogy egy blokkdiagonális mátrix karakterisztikus polinomja a blokkok karakterisztikus polinomjának szorzata, minimálpolinomja pedig a blokkok minimálpolinomjának legkisebb közös többszöröse.

P $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \\ \mathcal{U}_2 &= \operatorname{span}(\mathbf{e}_3), \\ \mathcal{U}_3 &= \operatorname{span}(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5) \\ \mathcal{V} &= \mathbb{R}^5 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{aligned}$

A karakterisztikus polinomja

$$k_A(x) = (x^2 - 4x + 4)(4 - x)(x^2 - x - 2) = -(x-2)^3(x+1)(x-4),$$

és a minimálpolinomja

$$m_A(x) = \left[(x-2)^2,\ (x-4),\ (x-2)(x+1)\right] = (x-2)^2(x+1)(x-4).$$

Általánosított sajátvektorok

Előfordul, hogy egy $A \in K^{n\times n}$ mátrixnak minden sajátértéke K-beli (azaz $k_A(x)$ lineáris faktorokra bontható), mégsem diagonalizálható a mátrix, mert nincs elég sajátvektora.

P Az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak 1 az egyetlen sajátértéke, de a sajátaltere, azaz $A - I$ nulltere, csak 1-dimenziós.

Viszont minden $\mathbf{v} \in K^3$ vektort $\mathbf{0}$-ba visz az $(A - I)$ egy alkalmas hatványa, már a köbe is, mert A karakterisztikus polinomja $(x - 1)^3$.

D

Általánosított sajátvektorok és sajátaltér

A $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektort az $A \in K^{n \times n}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátvektorának nevezzük, ha valamilyen k pozitív egészre $(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
A általánosított λ-sajátaltere

$$\bar{\mathcal{V}}_\lambda = \{\mathbf{v} \in K^n \mid \exists k > 0 : \ (A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}\}.$$

Egy $\mathbf{v} \in \bar{\mathcal{V}}_\lambda$ vektor λ-hosszának fogjuk nevezni azt a minimális k számot, amelyre $(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Nyilván: $\mathcal{V}_\lambda \leqslant \bar{\mathcal{V}}_\lambda \leqslant K^n$, és $\mathcal{V}_\lambda$ nemnulla vektorai (azaz a λ-hoz tartozó sajátvektorok) éppen a $\bar{\mathcal{V}}_\lambda$ azon elemei, amelyeknek a λ-hossza 1.

Á (1) $\mathcal{V}_\lambda$ és $\bar{\mathcal{V}}_\lambda$ A-invariáns alterek $\mathcal{V} = K^n$-ben.

(2) $\bar{\mathcal{V}}_\lambda$-ban a vektorok maximális λ-hossza a λ gyök multiplicitása az A minimálpolinomjában.

B (1): $(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow (A - \lambda I)^k (A\mathbf{v}) = A(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(2): Legyen $m_A(x) = (x - \lambda)^b h(x)$, ahol $h(\lambda) \neq 0$, és $\mathbf{v}$ λ-hossza k.

Ha $k > b$, akkor $m(x) \mid (x - \lambda)^{k-1} h(x) \Rightarrow (A - \lambda I)^{k-1} h(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, de a $h(x) = (x - \lambda)q(x) + r$ maradékos osztással (ahol $r \neq 0$ konstans)

$(A - \lambda I)^{k-1} h(A)\mathbf{v} = (A - \lambda I)^k q(A)\mathbf{v} + r(A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ↯

Másrészt $(A - \lambda I)^{b-1} h(A) \neq 0 \Rightarrow \exists \mathbf{v}$: $(A - \lambda I)^{b-1} h(A)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, de $(A - \lambda I)^b h(A)\mathbf{v} = m(A)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow h(A)\mathbf{v} \in \bar{\mathcal{V}}_\lambda$, és a λ-hossza b.

K $\bar{\mathcal{V}}_\lambda = \mathcal{N}((A - \lambda I)^b) = \mathcal{N}((A - \lambda I)^{b+1}) = \ldots$, ha b a λ multiplicitása $m_A(x)$-ben.

Mj Be fogjuk látni: $\mathcal{V} = \oplus \bar{\mathcal{V}}_\lambda$, ha $k_A(x)$ lineáris faktorokra bomlik.

T **Minimálpolinom relatív prím tényezőkre bontása**

Legyen $A \in K^{n\times n}$, $m_A(x) = f(x)g(x)$, ahol $f(x), g(x) \in K[x]$ relatív prím normált polinomok. Ekkor

$$A \sim \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}, \text{ ahol } m_B(x) = f(x),\ m_C(x) = g(x).$$

B Jelöljük az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ transzformációt is A-val, és legyen $\mathcal{V} = K^n$, $\mathcal{U} = \operatorname{Ker} f(A)$, $\mathcal{W} = \operatorname{Ker} g(A)$. Láttuk korábban, hogy ekkor $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ A-invariánsak. Belátjuk, hogy $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 0$, azaz $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$: f, g rel. prímek $\Rightarrow$
$\exists a(x), b(x) \in K[x]$: $1 = a(x)f(x) + b(x)g(x) \Rightarrow \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$:
$\mathbf{v} = I\mathbf{v} = a(A)f(A)\mathbf{v} + b(A)g(A)\mathbf{v} = a(A)\mathbf{0} + b(A)\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\operatorname{Im} g(A) \leqslant \mathcal{U}$, (és $\operatorname{Im} f(A) \leqslant \mathcal{W}$): $\forall g(A)\mathbf{v} \in \operatorname{Im} g(A)$:
$f(A)g(A)\mathbf{v} = m(A)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow g(A)\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f(A) = \mathcal{U}$

$\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$: $n = \dim \operatorname{Im} g(A) + \dim \operatorname{Ker} g(A) \leqslant \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} = \dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}) \leqslant n \Rightarrow$ végig $=$ van $\Rightarrow \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Tehát $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ és a $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{U}} \dot{\sqcup} \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ bázisban A mátrixa $\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$.

Ekkor B az $A|_{\mathcal{U}}$ mátrixa $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$-ban, C az $A|_{\mathcal{W}}$ mátrixa $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$-ben.

$\mathcal{U} = \operatorname{Ker} f(A)$, $\mathcal{W} = \operatorname{Ker} g(A) \Rightarrow f(A)(\mathcal{U}) = 0$, $g(A)(\mathcal{W}) = 0$,

továbbá $[f(A)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} f(B) & O \\ O & f(C) \end{bmatrix}$ és $[g(A)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} g(B) & O \\ O & g(C) \end{bmatrix} \Rightarrow$

$f(B) = O$, $g(C) = O \Rightarrow m_B(x) \mid f(x)$, $m_C \mid g(x)$.

De f és g relatív prímek $\Rightarrow$

$f(x)g(x) = m_A(x) = [m_B(x), m_C(x)] = m_B(x)m_C(x) \mid f(x)g(x)$, így a fokokra $=$ van, tehát $m_B(x) = f(x)$ és $m_C(x) = g(x)$.

Mj A tételben az ilyen felbontáshoz tartozó $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ alterek egyértelműek, ugyanis ha $\mathcal{V} = \mathcal{U}' \oplus \mathcal{W}'$ másik ilyen felbontás, akkor $f(B') = O \Rightarrow f(A)\mathcal{U}' = 0$ és $g(C') = O \Rightarrow g(A)\mathcal{W}' = 0$, ezért $\mathcal{U}' \leqslant \operatorname{Ker} f(A) = \mathcal{U}$ és $\mathcal{W}' \leqslant \operatorname{Ker} g(A) = \mathcal{W}$, így $\dim \mathcal{U}' + \dim \mathcal{W}' = n = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W}$ miatt $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ és $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$.

T Ha $A \in K^{n\times n}$-re

$$(-1)^n k_A(x) = (x-\lambda_1)^{a_1}\cdots(x-\lambda_k)^{a_k}$$
$$m_A(x) = (x-\lambda_1)^{b_1}\dots(x-\lambda_k)^{b_k},$$

ahol $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ különböző sajátértékek, akkor A hasonló egy olyan blokkdiagonális $\operatorname{diag}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_k)$ mátrixhoz, ahol

$$k_{B_s} = (-1)^{a_s}(x-\lambda_s)^{a_s} \text{ és } m_{B_s} = (x-\lambda_s)^{b_s} \quad (s = 1, 2\dots, k).$$

B Az előző tétel többszörös alkalmazásával kapjuk a felbontást. A min.pol. az előző tételből. Kar. pol.: $k_A(x) = k_{B_1}(x)\cdots k_{B_k}(x)$, és a min.pol.-okból következik, hogy B_s-nek λ_s az egyetlen sajátértéke, így $k_{B_s}(x)$-ben λ_s multiplicitása a_s.

M Emlékeztető: $\dim\mathcal{V}_\lambda$ a λ geometriai multiplicitása

K $\mathcal{V} = \oplus\bar{\mathcal{V}}_\lambda$, és $\dim\bar{\mathcal{V}}_\lambda$ a λ algebrai multiplicitása.

B A korábbi tételbeli egyértelműség miatt a $\operatorname{diag}(B_1,\dots,B_k)$ felbontáshoz tartozó alterek csak a $\bar{\mathcal{V}}_{\lambda_s} = \operatorname{Ker}(A-\lambda_s I)^{b_s}$ lehetnek, és ezek dimenziója a karakterisztikus polinomból következően a_s.

P Határozzuk meg az alábbi A mátrix általánosított sajátaltereit, és írjuk fel A-t egy a $\oplus \bar{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ felbontáshoz tartozó blokkdiagonális alakban!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

m Látható, hogy $r(A) = 2$, így a 0 sajátérték. $\dim \bar{\mathcal{V}}_0 = ?$

$\operatorname{Ker} A \leqslant \operatorname{Ker} A^2 \leqslant \cdots$, ahol leáll ($A^k$ rangja nem fogy), az a $\bar{\mathcal{V}}_0$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$, $r(A^2) = 1$, $r(A^3) = 1$.

$\bar{\mathcal{V}}_0 = \operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{span}((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$

S.é. $0, 0, \lambda_3$, $\operatorname{tr}(A) = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1$

$\bar{\mathcal{V}}_1 = \mathcal{V}_1 = \operatorname{span}((1, 0, 2))$.

$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2)\}$ bázisban: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A B_1 blokk $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ is lehet, ha $\{A\mathbf{v}, \mathbf{v}\}$ bázist választunk $\bar{\mathcal{V}}_0$-ban, 2 hosszú $\mathbf{v}$-vel.

T **Diagonalizálhatóság minimálpolinomos feltétele**

Tfh. $A \in K^{n\times n}$, $k_A(x)$ lin. faktorokra bomlik $K[x]$-ben.

Ekvivalens:

(i) A diagonalizálható K fölött

(ii) $\bar{\mathcal{V}}_\lambda = \mathcal{V}_\lambda$ minden λ sajátértékre

(iii) $m_A(x)$ minden gyöke egyszeres.

B (i)$\Leftrightarrow$(ii): A diag.-ható $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda$ alg. és geom. mutliplicitása egyenlő $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda$: $\dim \bar{\mathcal{V}}_\lambda = \dim \mathcal{V}_\lambda$ $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda$: $\bar{\mathcal{V}}_\lambda = \mathcal{V}_\lambda$, ui. $\bar{\mathcal{V}}_\lambda \geqslant \mathcal{V}_\lambda$ mindig igaz.
(ii)$\Leftrightarrow$(iii): $\bar{\mathcal{V}}_\lambda = \mathcal{V}_\lambda$ $\Leftrightarrow$ $\bar{\mathcal{V}}_\lambda$-ban a maximális λ-hossz 1 $\Leftrightarrow$ a minimálpolinomban λ multiplicitása 1.

F Diagonalizálható-e az A komplex mátrix, ha $A^3 - A = I$?

m $m_A(x) | x^3 - x - 1 =: f(x)$, és
$(f(x), f'(x)) = (x^3 - x - 1, 3x^2 - 1) = 1 \Rightarrow f(x)$-nek nincs többszörös gyöke $\Rightarrow m_A(x)$-nek sincs többszörös gyöke $\Rightarrow A$ diagonalizálható.