Bevezetés az algebrába 2

Jordan-normálalak

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Jordan-blokkok és Jordan-láncok

Nilpotens mátrixok

Á Tfh $N \in K^{n\times n}$ nilpotens mátrix, azaz van olyan m, hogy $N^m = O$. Ekkor

(1) $k_N(x) = (-1)^n x^n$, és $K^n = \bar{\mathcal{V}}_0$

(2) $m_N(x) = x^k$, ahol k az általánosított sajátvektorok maximális 0-hossza.

(3) N diagonalizálható $\iff$ $m_N(x) = x$ $\iff$ $N = O$

(4) $m_N(x) = x^n$ $\iff$

$$N \sim J := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

B (1): $m_N(x) \mid x^m \Rightarrow 0$ az egyetlen sajátérték $\Rightarrow k_N(x) = (-1)^n x^n$.
$N^m = 0 \Rightarrow$ minden $\mathbf{v}$ a 0-hoz tartozó általánosított sajátvektor.
(2): Köv. abból, hogy $K^n = \bar{\mathcal{V}}_0$.
(3): Köv. abból, hogy diag.-ható $\iff m_N(x) = x^k$-nak nincs többszörös gyöke.
(4): $\Leftarrow$: Legyen J a jobb oldali mátrix. Az ehhez tartozó $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázison az N hatása $\mathbf{b}_n \mapsto \mathbf{b}_{n-1} \mapsto \mathbf{b}_{n-2} \mapsto \cdots \mapsto \mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{0}$.
Így $\mathbf{b}_n$ n 0-hosszú ált. sajátvektor $\Rightarrow m_N(x)$-ben x kitevője $\geqslant n \Rightarrow m_N(x) = x^n$.
$\Rightarrow$: Van olyan $\mathbf{v}$, amelyre $N^{n-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $N^n\mathbf{v} = \mathbf{0}$ mindenképpen.
Erre $\mathcal{U} := \operatorname{span}(\mathbf{v}, N\mathbf{v}, \ldots, N^{n-1}\mathbf{v})$ N-invariáns altér, és nem lehet n-nél kisebb dimenziójú, mert akkor $N|_{\mathcal{U}}$ min.polinomja x^{n-1} osztója lenne, de $N^{n-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Az $\{N^{n-1}\mathbf{v}, \ldots, N^2\mathbf{v}, N\mathbf{v}, \mathbf{v}\}$ bázisban a transzformáció mátrixa éppen a jobb oldali J mátrix.

F Hogy néznek ki a tételbeli J mátrix hatványai?

m $\mathbf{e}_n \overset{J}{\mapsto} \mathbf{e}_{n-1} \overset{J}{\mapsto} \mathbf{e}_{n-2} \overset{J}{\mapsto} \cdots \overset{J}{\mapsto} \mathbf{e}_1 \overset{J}{\mapsto} \mathbf{0}$

J^t hatása $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}_{i-t}$, ha $i > t$, és $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{0}$ különben.

J^t elemei: 0-k, kivéve az átló fölötti t. ferde 1-es sort.

$\Rightarrow J^{n-1} = E_{1n}$, $J^n = O$. Ebből is látható, hogy $m_J(x) = x^n$.

F Van-e minden $k < n$-re olyan $N \in K^{n\times n}$ nilpotens mátrix, amelynek a minimálpolinomja x^k?

m Igen, például egy olyan blokkdiagonális mátrix, amelynek egy diagonális blokkja egy $k \times k$-as, x^k minimálpolinomú mátrix mint az előző állítás (4) pontjában, a többi pedig nulla (vagy legföljebb ekkora hasonló típusú mátrix).

P Az $N = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ mátrixra $m_N(x) = [x^3, x^2] = x^3$.

λ-blokkok

Láttuk, hogy ha egy $A \in K^{n\times n}$ minden sajátértéke K-beli, akkor a mátrix alkalmas bázisban olyan blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, amelyeknek minimálpolinomja $(x-\lambda)^k$ alakú, ezekhez a blokkokhoz tartozó A-invariáns alterek pedig A általánosított sajátalterei. Lehet-e egy ilyen blokkot még tovább bontatni?

Á Ha $\mathbf{v}$ egy k λ-hosszúságú általánosított sajátvektor, akkor $\mathbf{v}$ benne van egy k-dimenziós invariáns $\mathcal{U} \leqslant \bar{\mathcal{V}}_\lambda$ altérben, és $A\,|_{\mathcal{U}}$ mátrixa hasonló az alábbi "majdnem diagonális" mátrixhoz:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k}$$

Fordítva: ha egy $\mathcal{U}$ invar. altéren a transzf. ilyen mátrixú, akkor $\mathcal{U} \leqslant \bar{\mathcal{V}}_\lambda$, és van benne k λ-hosszú ált. sajátvektor, így a $m_J(x) = (x-\lambda)^k$.

D **Jordan-blokk**

Az olyan négyzetes mátrixot, amelynek átlójában végig λ, átlója fölött végig 1, mindenhol máshol 0 elemei vannak (mint az előző), Jordan-blokknak vagy Jordan-λ-blokknak nevezzük.

B $\mathbf{0} \xleftarrow{A-\lambda I} \mathbf{v}_1 \xleftarrow{A-\lambda I} \dots \xleftarrow{A-\lambda I} \mathbf{v}_{k-1} \xleftarrow{A-\lambda I} \mathbf{v}_k = \mathbf{v}$

$\mathcal{U} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ invariáns $N = A - \lambda I$-re, így $A = N + \lambda I$-re is, és $A|_{\mathcal{U}}$ min.pol.-ja $(x-\lambda)^k$, így $\dim \mathcal{U} \geqslant k$, tehát a $\mathbf{v}_i$-k ftln-ek, és $(A - \lambda I)|_{\mathcal{U}}$ mátrixa a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ bázisban a $k \times k$-as J_0 Jordan-0-blokk, $A|_{\mathcal{U}}$ mátrixa pedig a $k \times k$-as $J_0 + \lambda I$ Jordan-λ-blokk.
Fordítva: $N = J - \lambda I$ nilpotens, az utolsó báziselem N-re k 0-hosszúságú ált. sajátvektor. $\Rightarrow m_N(x) = x^k \Rightarrow m_J(x) = (x-\lambda)^k$.

D $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \bar{\mathcal{V}}_\lambda$ Jordan-lánc, ha

$$\mathbf{0} \xleftarrow{A-\lambda I} \mathbf{v}_1 \xleftarrow{A-\lambda I} \dots \xleftarrow{A-\lambda I} \mathbf{v}_{k-1} \xleftarrow{A-\lambda I} \mathbf{v}_k = \mathbf{v}$$

Cél: belátni, hogy az A mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz $\mathcal{V} = K^n$-nek van Jordan-láncokból álló bázisa.

D **Jordan-mátrix:**

Olyan blokkdiagonális mátrix, amelynek diagonális blokkjai **nem feltétlenül különböző** sajátértékekhez tartozó Jordan-blokkok.

P

$$J = \left[\begin{array}{cc|c|ccc} 2 & 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ \hline & & 2 & & & \\ \hline & & & 3 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 3 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

egy három diagonális blokkból álló Jordan-mátrix, két 2-blokkból és egy 3-blokkból áll. (A diag. blokkokon kívüli 0-kat nem írtuk ki, hogy jobban látsszon a blokkszerkezet.)

P A diagonális mátrixok is Jordan-mátrixok csupa 1×1-es blokkal.

T **Jordan-tétel**

Tfh $A \in K^{n\times n}$, és $k_A(x)$ lineáris tényezők szorzatára bomlik K fölött (azaz minden gyöke K-beli). Ekkor A hasonló egy

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & O & \dots & O \\ O & J_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_m \end{bmatrix},$$

Jordan-mátrixhoz (a mátrix Jordan-féle normálalakjához), és ez a normálalak a diagonális blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

(Biz. később)

K Algebrailag zárt K test esetén minden $A \in K^{n\times n}$ mátrix hasonló egy Jordan-mátrixhoz, azaz minden lineáris $f : V_K \to V_K$ transzformációhoz van olyan bázis, melyben a mátrixa Jordan-mátrix.

Mj Minden K testhez van olyan $L \geqslant K$ test, amely algebrailag zárt, így minden mátrixnak van Jordan-normálalakja legalább egy bővebb test fölött.

Mj Ha $K \leqslant L$ testek, $A, B \in K^{n\times n}$, és $A \sim B$ az L fölött, akkor K fölött is hasonlók: ha az $XB = AX$ n^2-változós lineáris egyenletrendszer paraméteresen felírt (K-beli együtthatós!) megoldásának van olyan behelyettesítése L-ben, amelyre $|X| \neq 0$, akkor K-ban is van.

P Bizonyítsuk be Jordan-normálalak segítségével, hogy $A \sim A^T$

m $A \sim J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_k)$ a $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot\sqcup \ldots \dot\sqcup \mathcal{B}_k$ bázisra való áttéréssel. Legyen $\mathcal{B}_i'$ a $\mathcal{B}_i$ fordított sorrendben. Ekkor az A mátrix a $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1' \dot\sqcup \ldots \dot\sqcup \mathcal{B}_k'$ bázisban J^T, tehát $J^T \sim J$. Legyen $A = PJP^{-1}$ és $J^T = QJQ^{-1}$. Ekkor

$$A^T = (P^{-1})^T J^T P^T = (P^{-1})^T QJQ^{-1} P^T = (Q^{-1}P^T)^{-1} J (Q^{-1}P^T) \sim J \sim A.$$

F A Jordan-tétel alapján hány páronként nem hasonló mátrix létezik, amelynek a karakterisztikus polinomja $k(x) = (x-1)^4$?

m Annyi, ahány lényegesen különböző 4×4-es Jordan-mátrix, amelyeknek az 1 az egyetlen sajátértéke.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 2+2 = 3+1 = 4$

Jordan-normálalak meghatározása a bázis megadása nélkül

T **Jordan-alak és a kar.pol., min.pol., $\dim \mathcal{V}_\lambda$ kapcsolata**

Legyen $A \in K^{n\times n}$, $k_A(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{a_1}\cdots(x-\lambda_k)^{a_k}$, $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{b_1}\cdots(x-\lambda_k)^{b_k}$, ahol $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ különbözők. Legyen J az A-hoz hasonló Jordan-mátrix. Ekkor

(1) a_i a J λ_i-blokkjainak összmérete,

(2) b_i a J λ_i-blokkjainak maximális mérete,

(3) $\dim \mathcal{V}_{\lambda_i}$ a J Jordan-λ_i-blokkjainak száma

B Egy $k\times k$-as Jordan-λ-blokk kar. pol.-ja $(\lambda-x)^k$, min.pol.-ja $(x-\lambda)^k$.
(1) és (2) következik abból, hogy $k_A(x) = k_J(x)$ a blokkok kar.pol.-jának szorzata, $m_A(x) = m_J(x)$ pedig a min.pol.-ok legkisebb közös többszöröse.
(3): $J-\lambda I$ sorai lépcsős alakúak, ha a λ-blokkok utolsó, 0-vá vált, sorait a mátrix aljára gyűjtjük $\Rightarrow \dim \mathcal{N}(A-\lambda I) = n - r(A-\lambda I)$ $= n - r(J-\lambda I)$ a Jordan-λ-blokkok száma.

K Ha A karakterisztikus polinomjának minden sajátérték $\leqslant 6$-szoros gyöke, akkor a fenti tétel segítségével meghatározható a Jordan-normálalak.

P $k(x) = -(x-2)^5$, $m(x) = (x-2)^2$, $\dim V_2 = 3$. Mi a Jordan-normálalak?

m $5 = 2 + 2 + 1$ az 5 egyetlen olyan felbontása, ahol 3 poz. egész összeadandó van, és 2 a legnagyobb.

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

F $k(x) = -(x-2)^5$, $m(x) = (x-2)^3$, $\dim V_2 = 3$

m $5 = 3 + 1 + 1$ az egyetlen háromtagú felbontás, amelyben 3 a legnagyobb tag.

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

F Határozzuk meg az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

m $k_A(x) = (x-1)^3(x-2)$. Kérdés: hány 1-blokk van? $\dim V_1 = ?$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rangja } 2 \quad \Rightarrow$$

$\dim V_1 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow 2$ darab 1-blokk. $\Rightarrow$ 1-blokkok: $3 = 2 + 1$

$$A \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 2 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

Jordan-blokkok mérete rangsorozatokból

Hogyan állapíthatjuk meg a Jordan-blokkok méretét általános eseben?

T (1) Egy $k \times k$-as nilpotens Jordan-blokk (azaz Jordan-0-blokk) hatványainak rangja:

	$I_k = N^0$	N	N^2	$\dots$	N^k	N^{k+1}	$\dots$
rang	k	$k-1$	$k-2$	$\dots$	0	0	$\dots$

(2) Egy $k \times k$-as nem nilpotens Jordan-blokk hatványainak rangja k, mert a blokk invertálható

(3) Egy J Jordan-mátrixra
$d_k := r(J^{k-1}) - r(J^k)$ a J-ben levő legalább $k \times k$-as Jordan-0-blokkok száma

(4) Egy J Jordan-mátrixra
$n_k = d_k - d_{k+1}$ a J-beli $k \times k$-as 0-blokkok száma

(5) $J - \lambda I$-re (4), (5) megadja a λ-blokkok méreteit.

B (1): N hatványai is redukált lépcsős alakúak, de mindegyik eggyel kevesebb 1-est tartalmaz, mint az előző, amíg el nem éri a O mátrixot.

(2) ✓

(3) A diagonális blokkok rangja összeadódik, sőt, a mátrix lépcsős marad a hatványozásnál, ha a $\mathbf{0}$ sorokat a mátrix aljára visszük. Azoknak a nilpotens blokkoknak a mérete csökken eggyel, amelyek még nem nullázódtak ki a k. hatvány előtt.

(4) A (3)-ból ✓

(5) $J - \lambda I$ is Jordan-mátrix, ahol az eredeti λ-blokkokból lesznek a 0-blokkok.

K Tetszőleges A mátrixra a tétel (3)–(5) pontjai megadják a Jordan-normálalak blokkjainak méretét, mert az A polinomjainak rangja invariáns a hasonlóságra nézve.

P $A \in \mathbb{C}^{10\times 10}$, λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. Az $r_k = \mathrm{r}((A-\lambda I)^k)$ rangok rendre $r_1 = 5$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$, $r_4 = 0$. Írjuk fel A Jordan-normálalakját!

m A rangok csökkenő sorozatot alkotnak, így $0 = r_5 = r_6 = \cdots$, másrészt $r_0 = r(I) = 10$.

A tétel szerint a rangok (0.-tól kezdett) sorozatának második differenciái adják az adott méretű λ-blokkok számát.

k	0		1		2		3		4		5
r_k	10		5		2		1		0		0
d_k		5		3		1		1		0	
n_k			2		2		0		1		

$$\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
\lambda & 1 & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & & \\ \hline
 & & & & \lambda & 1 & & & & \\
 & & & & & \lambda & & & & \\ \hline
 & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & \lambda & & \\ \hline
 & & & & & & & & \lambda & \\ \hline
 & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right]$$

P $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$, sajátértékei $\lambda = 3, 2, 1.$

$A - 3I$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;

$A - 2I$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;

$A - I$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

m $n = 14$, a multiplicitások a hatványok alapján 3-é $\geqslant 5$, 2-é $\geqslant 5$, 1-é $\geqslant 4$. Ezek összege 14, így mindenütt egyenlőség áll, ezért nem csökkennek tovább a rangok.

$\lambda = 3$:

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
\hline
r_k & 14 & & 12 & & 11 & & 10 & & 9 & & 9 \\
d_k & & 2 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & \\
n_k & & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
n_4 = 1 \\
n_1 = 1
\end{array}
$$

$$\lambda = 2: \quad \begin{array}{c|ccccccccc} k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \hline r_k & 14 & & 12 & & 10 & & 9 & & 9 \\ d_k & & 2 & & 2 & & 1 & & 0 & \\ n_k & & & 0 & & 1 & & 1 & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} n_3 = 1 \\ n_2 = 1 \end{array}$$

$$\lambda = 1: \quad \begin{array}{c|ccccccc} k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\ \hline r_k & 14 & & 11 & & 10 & & 10 \\ d_k & & 3 & & 1 & & 0 & \\ n_k & & & 2 & & 1 & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} n_2 = 1 \\ n_1 = 2 \end{array}$$

$$\text{Összefoglalva:} \quad J = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc|cc|cc|c|c}
3 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 3 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & 3 & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 2 & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & 2 & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$$

Mj Ha $(A-\lambda I)^{k-1}$ valamely lépcsős alakja L, akkor $(A-\lambda I)^k$ lépcsős alakját egyszerűbb az $L\cdot(A-\lambda I)$-ből számítani, mivel L kiszámolása csak elemi mátrixokkal való balról szorzást jelent, azaz

$$L\cdot(A-\lambda I)=E\cdot(A-\lambda I)^{k-1}\cdot(A-\lambda I)=E\cdot(A-\lambda I)^k.$$

Mj Ha m_λ a λ algebrai multiplicitása, és s a legnagyobb λ-blokk rendje, akkor $\mathrm{r}((A-\lambda I)^s)=n-m_\lambda$.

Mj Ha a rangok csökkenése eléri az 1-et, azaz $d_k=1$, akkor – mivel a d_k sorozat monoton csökkenő – a rangok sorozata 1-esével csökken addig, amíg el nem éri az $n-m_\lambda$ értéket.

P A rangok számítása: Mi a Jordan-normálalakja a köv. mátrixnak, ha $k(x) = -(x-1)^4(x+1)$?

$$\begin{bmatrix} -7 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

m $\lambda = -1$: 1 db 1×1-es blokk ✓

$\lambda = 1$: $\mathrm{r}(A - I)$ számítása

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(kivételesen kihagyjuk a nulla sorokat)

$\Rightarrow r_1 = 3$

r$((A-I)^2)$ számítása

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r_2 = 2 \Rightarrow r_3 = 1$$

$(\Rightarrow r_4 = 1$, mert $r_k \geqslant 5 - 4 = 1)$

Innen a táblázat:

k	0		1		2		3		4
r_k	5		3		2		1		1
d_k		2		1		1		0	
n_k			1		0		1		

1 db 1×1-es és 1 db 3×3-as 1-blokk van.

A Jordan-tétel bizonyítása

Emlékeztető:

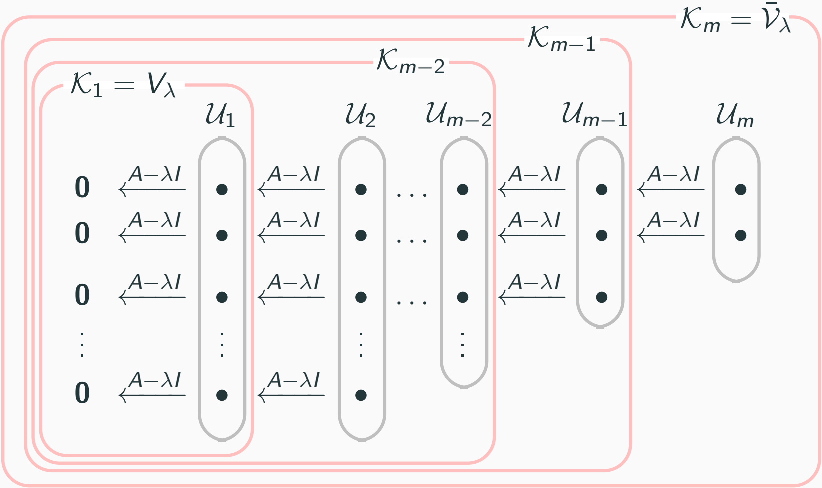
T (Jordan) Tfh $A \in K^{n\times n}$, és $k_A(x)$ lineáris tényezők szorzatára bomlik K fölött (azaz minden gyöke K-beli). Ekkor A hasonló egy

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & O & \dots & O \\ O & J_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_m \end{bmatrix},$$

Jordan-mátrixhoz (a mátrix Jordan-féle normálalakjához), és ez a normálalak a diagonális blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

B Az egyértelműség következik abból, hogy az $r((A-\lambda I)^k)$ rangok meghatározzák a Jordan-blokkok méreteit.

A létezéshez azt kell belátnunk, hogy K^n-nek van Jordan-bázisa, azaz olyan bázis, amely diszjunkt Jordan-láncok uniója. Mivel $K^n = \bigoplus_\lambda \bar{\mathcal{V}}_\lambda$, elég a Jordan-láncokat egy $\bar{\mathcal{V}}_\lambda$-ban megkonstruálni.



Terv: legyártani a Jordan-láncokat a leghosszabbaktól kezdve. Tfh. m a maximális λ-hossz $\bar{\mathcal{V}}_\lambda$-ban, azaz $\mathcal{K}_i := \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^i$-re

$$0 < \mathcal{K}_1 = \mathcal{V}_\lambda < \mathcal{K}_2 \ldots < \mathcal{K}_m = \bar{\mathcal{V}}_\lambda$$

$\mathcal{K}_i$-ben a $\mathcal{K}_m \setminus \mathcal{K}_{m-1}$-ből, $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \mathcal{K}_{m-2}$-ből, ... érkező láncok szemeit egészítjük ki új $\mathcal{K}_i \setminus \mathcal{K}_{i-1}$-beliekkel úgy, hogy függetlenek maradjanak.
Ehhez minden $\mathcal{K}_i$-ben keresünk egy $\mathcal{U}_i \leqslant \mathcal{K}_i$ alteret úgy, hogy $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i-1} \oplus \mathcal{U}_i$, és $(A - \lambda I)\mathcal{U}_{i+1} \leqslant \mathcal{U}_i$.
Ekkor a $\mathcal{K}_i$-ben induló láncok kezdőszemei az $(A - \lambda I)\mathcal{U}_{i+1}$ altér $\mathcal{U}_i$-beli direkt kiegészítőjének bázisát adják.

- Ilyen $\mathcal{U}_i$ alterek léteznek:
  Lefelé menő indukcióval i-re. $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_{m-1} \oplus \mathcal{U}_m$ van.
  Ha $\mathcal{K}_{i+1} = \mathcal{K}_i \oplus \mathcal{U}_{i+1}$, akkor
  $(A - \lambda I)\mathcal{U}_{i+1} \leqslant \mathcal{K}_i$, mert
  $$(A - \lambda I)^i (A - \lambda I)\mathcal{U}_{i+1} \leqslant (A - \lambda I)^{i+1}\mathcal{K}_{i+1} = 0, \text{ és}$$
  $(A - \lambda I)\mathcal{U}_{i+1} \cap \mathcal{K}_{i-1} = 0$, mert
  ha benne van $\mathbf{v} = (A - \lambda I)\mathbf{u}$ valamely $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{i+1}$-re, akkor
  $\mathbf{0} = (A - \lambda I)^{i-1}(A - \lambda I)\mathbf{u} = (A - \lambda I)^i \mathbf{u} \Rightarrow$
  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}_i \cap \mathcal{U}_{i+1} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
  Ezért $\exists (A - \lambda I)\mathcal{U}_{i+1} \leqslant \mathcal{U}_i \leqslant \mathcal{K}_i$, hogy $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i-1} \oplus \mathcal{U}_i$.

- $\bar{\mathcal{V}}_\lambda = \oplus \mathcal{U}_i$,
  ugyanis $\bar{\mathcal{V}}_\lambda = \mathcal{K}_m = \mathcal{K}_{m-1} \oplus \mathcal{U}_m = \mathcal{K}_{m-2} \oplus \mathcal{U}_{m-1} \oplus \mathcal{U}_m = \cdots =$
  $\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_m = \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_m$.
- $(A - \lambda I)\,|_{\mathcal{U}_{i+1}} \colon \mathcal{U}_{i+1} \to \mathcal{U}_i$ injektív,
  mert $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \cap \mathcal{U}_{i+1} = \mathcal{K}_1 \cap U_{i+1} \leqslant \mathcal{K}_i \cap \mathcal{U}_{i+1} = 0$,
  tehát az $\mathcal{U}_i$-nek egy $\mathcal{B}_i$ bázisát választhatjuk úgy, hogy az $(A - \lambda I)\mathcal{B}_{i+1}$ független vektorrendszert egészítjük ki (a kiegészítő láncszemek kezdenek új Jordan-láncokat).
- A $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \mathcal{B}_m$ rendszer bázis lesz $\bar{\mathcal{V}}_\lambda$-ban, mert $\bar{\mathcal{V}}_\lambda = \oplus \mathcal{U}_i$, és ez a $\mathcal{B}_\lambda$ a konstrukció miatt Jordan-láncok uniója.
- Így $\mathcal{B} = \cup \mathcal{B}_\lambda$ Jordan-bázis az A mátrixra nézve, azaz ebben a bázisban az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ transzformáció mátrixa Jordan-mátrix, az A Jordan-normálalakja.

P Adjuk meg az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját és egy Jordan-bázist!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

m $k_A(x) = (x-1)^4$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{\cdot(A-I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{\cdot(A-I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pirossal az egyes $(A-I)$-hatványok ($\mathbf{0}$ sorok nélküli) redukált lépcsős alakját jelöltük.

k	0		1		2		3		4
$r((A-I)^k$	4		2		1		0		0
d_k		2		1		1		0	
n_k			1		0		1		

$$\Rightarrow \mathcal{J}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A Jordan-bázis kiszámolása:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, (0,-2,0,1)) \quad \mathcal{K}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4) \qquad \mathcal{K}_3 = \mathbb{R}^4$$

$\bar{\mathcal{V}}_1 = \mathbb{R}^4$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{A-I} \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \xleftarrow{A-I} \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \xleftarrow{A-I} \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{A-I} \begin{bmatrix}0\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

Tehát a Jordan-bázisra való áttérés mátrixa:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{ccc}
 & A & P \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

F Hozzuk Jordan-normálalakra az alábbi mátrixot!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m $k_A(x) = -(x-1)^3 x^2$.

$A - \lambda I$ hatványainak red. lépcsős alakja (a $\mathbf{0}$ sorok nélkül)

$$\operatorname{rref}'(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rref}'(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rref}' A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rref}' A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mindkét rangsorozat stabilizálódik ezután.

k	0		1		2		3
$r((A-I)^k)$	5		3		2		2
d_k		2		1		0	
n_k			1		1		

k	0		1		2		3
$r(A^k)$	5		4		3		3
d_k		1		1		0	
n_k			0		1		

Az A mátrix Jordan-normálalakjában egy 1×1-es és egy 2×2-es 1-blokk és egy 2×2-es 0-blokk van:

$$\mathcal{J}(A) = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A $\bar{\mathcal{V}}_1$-beli Jordan-láncok kiszámítása:

$$\operatorname{rref}'(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rref}'(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{K}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, (0,0,1,2,0)),$

$\mathcal{K}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, (0,2,1,0,0), (0,-1,0,1,0)).$

$\bar{\mathcal{V}}_1$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{A-I} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{A-I} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{A-I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $\bar{\mathcal{V}}_0$-beli Jordan-láncok kiszámítása:

$$\operatorname{rref}' A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rref}' A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_1 = \operatorname{span}((1,1,0,0,0)) \qquad \mathcal{K}_2 = \operatorname{span}((1,1,0,0,0),(1,0,0,-1,1))$$

$\bar{\mathcal{V}}_0$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{A} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban az A mátrix

$$\mathcal{J}(A) = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

alakú.

Mátrixok hasonlósági osztályai

F Melyek hasonlóak az alábbi mátrixok közül? A hasonlókhoz adjuk meg az átkonjugáló mátrixot!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

m Nyomok: $0, 3, 3, 3 \Rightarrow A$ nem hasonló a többihez.

$\det B = 0$, de $\det C = \det D = 1 \Rightarrow B$ sem.

C és D hasonlók-e? Mi a karakterisztikus polinomjuk?

$|C - xI| = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = -(x-1)^3 = |D - xI|$.

Tehát minden sajátértékük 1. Megegyezik-e a Jordan-alakjuk?

$r(C - I) = 2 = r(D - I)$, így a sajátalterük 1-dimenziós $\Rightarrow$ a Jordan-alakjuk egyetlen Jordan-blokkból áll $\Rightarrow$

$$C \sim D \sim J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A C-ből D-be átkonjugáló mátrix helyett mindegyikhez keresünk Jordan-bázist, így megkapjuk a $C \sim J \sim D$ átmenetet.

$\mathbb{R}^3 = \bar{\mathcal{V}}_1$, és egyetlen Jordan-lánc kell, tehát elég egy olyan vektort keresni, amelynek az 1-hossza a maximális 3, azaz $\mathbf{v} \notin \mathrm{Ker}(C-I)^2$, illetve $\mathbf{w} \notin \mathrm{Ker}(D-I)^2$.

$$C - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad (C-I)^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Ker}(C-I)^2 = \mathrm{span}((1,2,0),\ (-1,0,2))$$

$$D - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ (D-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Ker}(D-I)^2 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

C-hez $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ és $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1$ Jordan-láncot generál C-hez, illetve D-hez.

$$\mathbf{0} \xleftarrow{C-I} (4,0-8) \xleftarrow{C-I} (2,2,-2) \xleftarrow{C-I} (1,0,0)$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{D-I} (0,0,-2) \xleftarrow{D-I} (0,2,0) \xleftarrow{D-I} (1,0,0)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{-val és } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{-val}$$

$P_1^{-1}CP_1 = J$ és $P_2^{-1}DP_2 = J$, tehát $P = P_1P_2^{-1}$-zel $P^{-1}CP = D$.

Ellenőrzés: $P_1P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = D$$

P Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3-as komplex A mátrix van, melyre $A^3 = A^2$?

m $m_A(x) \mid x^3 - x^2 = x^2(x-1) \Rightarrow m_A(x)$ lehet $x,\ x-1, x(x-1),\ x^2$ vagy $x^2(x-1)$.

Az első két esetben csak $A = O$, illetve $A = I$ lehet. A a harmadik esetben is diagonalizálható, mert a minimálpolinomnak nincs többszörös gyöke, a sajátértékei pedig 0 és 1.

Ez két lehetőséget ad: $A \sim \operatorname{diag}(1,1,0)$ vagy $A \sim \operatorname{diag}(1,0,0)$.

Ha $m_A(x) = x^2$, akkor 0 az egyetlen sajátérték, és 2×2-es a legnagyobb Jordan-blokk, így $A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ha $m_A(x) = x^2(x-1)$, akkor Jordan-normálalak egy 2×2-es 0-blokkból és egy 1×1-es 1-blokkból áll, így $A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tehát hasonlóság erejéig 6 ilyen mátrix van.

Gyökvonás és hatványozás

Gyökvonás

F Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Igaz-e ez a szinguláris mátrixokra is?

m Elég Jordan-mátrixokra belátni az állítást, ugyanis ha $P^{-1}AP = J$, és $J = B^2$, akkor $A = PJP^{-1} = PB^2P^{-1} = (PBP^{-1})(PBP^{-1})$. Sőt, feltehető, hogy A egyetlen Jordan-blokk, mert a Jordan-mátrixból ezután diagonális blokkonként vonhatunk négyzetgyököt.

Tfh $\lambda \neq 0$, $\mu^2 = \lambda$ és

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \mu & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu \end{bmatrix}.$$

két $n \times n$-es Jordan-blokk.

Megmutatjuk, hogy $M^2 \sim A$.

$M^2 = (\mu I + N)^2 = \mu^2 I + 2\mu N + N^2 = \lambda I + 2\mu N + N^2,$
ahol N az $n \times n$-es nilpotens Jordan-blokk, azaz

$$M^2 = \begin{bmatrix} \mu^2 & 2\mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^2 & 2\mu & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mu^2 & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \mu^2 & 2\mu \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow k_{M^2}(x) = (\lambda - x)^n$, és $\mathrm{r}(M^2 - \lambda I) = \mathrm{r}(2\mu N + N^2) = n - 1 \Rightarrow$ a sajátaltér 1-dimenziós $\Rightarrow$ a J-alak egyetlen Jordan-blokk $\Rightarrow$
$\exists C : C^{-1} M^2 C = A \Rightarrow (C^{-1} M C)^2 = A.$

Szinguláris mátrixnak nem feltétlenül van négyzetgyöke. Pl. ha az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Jordan-blokk valamely B mátrix négyzete lenne, akkor B is nilpotens volna $\Rightarrow k_B(x) = x^2 \Rightarrow A = B^2 = O$ ↯

Hatványozás

Lehet-e nem diagonalizálható mátrixokat a Jordan-normálalakjuk segítségével hatványozni? Milyen egy Jordan-mátrix hatványa? Blokkdiagonális mátrixot diag. blokkonként hatványozunk, tehát elég egy $n \times n$-es Jordan λ-blokkra megnézni a hatványokat.

$\lambda = 0$-ra tudjuk: az N nilpotens $n \times n$-es Jordan-blokk k-adik hatványában a főátlóval párhuzamos k-adik egyenesen vannak 1-ek, mindenhol máshol 0. Így a Jordan-λ-blokkra

$$A^k = (N + \lambda I)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i$$

Ez azt jelenti, hogy a főátlóban végig λ^k, fölötte végig $\binom{k}{1}\lambda^{k-1}$, fölötte $\binom{k}{2}\lambda^{k-2}$, amíg vagy a k, vagy az n el nem fogy.

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

P Írjuk fel a $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó 5×5-ös A Jordan-blokk 3. és 6. hatványát

m

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^6 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 15 & -20 & 15 \\ 0 & 1 & -6 & 15 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F Számítsuk ki a $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix 10. hatványát!

m A 35.–37. oldalon kiszámítottuk ennek a mátrixnak a Jordan-alakját és Jordan-bázisát:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{-val} \quad J = P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$C^{10} = PJ^{10}P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 45 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 16 & -8 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 201 & -80 & 100 \\ 20 & -9 & 10 \\ -380 & 150 & -189 \end{bmatrix}$$