Bevezetés az algebrába 2

Mátrixfüggvények és -sorozatok

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Taylor-sorba fejthető függvények

Mátrixhatvány

Emlékeztető: Egy J Jordan-λ-blokkra

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

Ennek alapján egy tetszőleges A mátrix hatványai kiszámíthatók: ha $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_m)$ Jordan-alak, akkor $A^k = P\,\mathrm{diag}(J_1^k, \dots, J_m^k)P^{-1}$.

Vegyük észre, hogy az átló fölötti i. ferde vonalon álló értékek $\binom{k}{i}\lambda^{k-i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}\lambda^{k-i} = \frac{1}{i!}(x^k)^{(i)}\,|_{x=\lambda}$. $\Rightarrow$

Tetsz. $f(x)$ polinomra: az $f(J)$ i. ferde sorában végig $\frac{1}{i!}f^{(i)}(\lambda)$ áll.

D **Mátrixsorozat határértéke**

$A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ha $\forall i, j$: $\lim\limits_{k\to\infty} (A_k)_{ij} = (A)_{ij}$.

(Ez ekvivalens azzal, hogy mint n^2-dimenziós vektorsorozat tart A-hoz mint n^2-dim. vektorhoz.)

D **Mátrixsor összege:**

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k = A$, ha $\lim\limits_{N\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{N} A_k \right) = A$.

D Tfh. az $f(x)$ függvény hatványsorba fejthető: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Ekkor $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$-re $f(A) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, feltéve, hogy az utóbbi konvergens.

Á

Diagonalizálható mátrix függvénye

Ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizálható, és a sajátértékei az $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ sor konvergenciatartományába esnek, akkor $f(A)$ értelmezve van, és $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$-re $f(A) = P \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))P^{-1}$.

B Ha $P^{-1}AP = D$, akkor $\sum_{k=0}^{N} c_k D^k =$

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N} c_k \lambda_1^k & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sum_{k=0}^{N} c_k \lambda_n^k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

ha $N \to \infty$. Tehát $f(D) = \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$. $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{N} c_k A^k = P \left(\sum_{k=0}^{N} c_k D^k \right) P^{-1} \to Pf(D)P^{-1} =$$

$$= P \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))P^{-1}.$$

P $e^x = \sum \frac{1}{n!}x^n$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $e^A = ?$

m $k_A(x) = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$

Sajátvektorok $\lambda = 5$-höz $(1,2)$, $\lambda = -1$-hez $(-1,1)$.

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^5 & -e^{-1} \\ 2e^5 & e^{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^5 + 2e^{-1} & e^5 - e^{-1} \\ 2e^5 - 2e^{-1} & 2e^5 + e^{-1} \end{bmatrix}$$

T

Jordan-blokk függvénye

Ha λ benne van az $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ sor konvergenciatartományának belsejében, akkor a

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \text{Jordan-blokkra} \quad \exists f(J), \text{ és}$$

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \dots \\ 0 & f(\lambda) & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

B $\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m J^m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m \left(\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (x^m)^{(k)} \mid_{x=\lambda} \cdot N^k \right) =$
$\sum\limits_{k=0}^{m} \left(\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m \frac{1}{k!} (x^m)^{(k)} \mid_{x=\lambda} \right) N^k,$
tehát az átló fölötti k. ferde sorban az elemek:
$\frac{1}{k!} \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m (x^m)^{(k)} \mid_{x=\lambda} = (*)$
Mivel λ a konvergenciatartomány belsejében van, a szumma és a deriválás felcserélhető.
$(*) = \frac{1}{k!} \left(\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m \right)^{(k)} \Bigg|_{x=\lambda} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda).$

K Ha $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ spektruma benne van az $f(x) = \sum c_k x^k$ konvergenciatartományának belsejében, akkor $\exists f(A)$, és ha $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_m)$ Jordan-mátrix, akkor $f(A) = P \operatorname{diag}(f(J_1), \ldots, f(J_m)) P^{-1}$, ahol az $f(J_i)$ blokkok az előző tétel szerint számolhatók.

F A Jordan-féle normálalak segítségével határozzuk meg az alábbi A mátrixra az A^n, e^J és e^{3A} mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

m $k_A(x) = -(x-2)^2(x+5)$.

A Jordan-láncok: $\lambda = 2$-höz

$$A-2I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{\cdot(A-2I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1) \qquad \mathcal{K}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{(A-2I)} 3\mathbf{e}_1 \xleftarrow{(A-2I)} \mathbf{e}_2$$

$\lambda = -5$-höz:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{(A+5I)} (-9, 0, 7)$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{bmatrix} \tfrac{1}{21} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n & 3n2^{n-1} & -9(-5)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 7(-5)^n \end{bmatrix} \tfrac{1}{21} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} & \tfrac{9}{7}(2^n - (-5)^n) \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$f(x) = e^x$-re $\qquad f'(x) = e^x$
$\frac{1}{0!} f(\lambda) = e^\lambda, \qquad \frac{1}{1!} f'(\lambda) = e^\lambda$

$$e^J = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix}$$

$f(x) = e^{3x}$-re $\quad f'(x) = 3e^{3x}$
$\frac{1}{0!} f(\lambda) = e^{3\lambda}, \quad \frac{1}{1!} f'(\lambda) = 3e^{3\lambda}$

$$\begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{21}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^6 & 9e^6 & -9e^{-15} \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & 7e^{-15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix} = e^{3A}$$

Mátrixfüggvények kiszámítása Hermite-polinommal

Észrevételek

1. $J = \lambda I + N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Jordan-blokkra
   $f(J) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda) N^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda) N^k$, mert $N^n = O$, és így
   $f(J) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda)(J - \lambda I)^k$ a J-nek $\leqslant n-1$-edfokú polinomja.
2. Általában is, $f(A)$ felírható A polinomjaként, ui. a hatványsorban szereplő nagyobb A-hatványok kifejezhetők az $m_A(A) = O$ egyenlet alapján az $I, A, A^2, \ldots, A^{\deg m - 1}$ lin. komb.-jaiként.
3. Az $f(A)$ Jordan-alakból való kiszámításából láthatjuk, hogy csak az $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots, f^{(b_i-1)}(\lambda_i)$ értékeket kell tudnunk $f(A)$ megadásához, ahol $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{b_1} \cdots (x-\lambda_k)^{b_k}$. Tehát ha $p(x)$ olyan polinom, amelyre $f^{(t)}(\lambda_i) = p^{(t)}(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \ldots, k$, $\forall t = 0, 1, \ldots, b_i - 1$, akkor $f(A) = p(A)$.
4. A 3. alapján általánosíthatjuk $f(A)$ def.-ját minden olyan fv.-re, amelyekre λ_i-kben léteznek a megfelelő rendű deriváltak.

D **Spektrumon definiált függvény**

Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ spektruma $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, és a λ_i sajátérték multiplicitása a minimálpolinomban b_i.

Az f függvény definiálva van az A spektrumán, ha $\exists f^{(j)}(\lambda_i)$ $(j = 0, 1, \ldots, b_i - 1,\ i = 1, \ldots, k)$.

Ezek az értékek az f értékei az A spektrumán.

Mj $m_A(x)$ értékei az A spektrumán mind 0-k, mert ha λ_i egy polinomnak b_i-szeres gyöke, akkor az $1., \ldots, (b_i - 1)$. deriváltjának is gyöke.

Á $p, q \in \mathbb{C}[x]$ polinomokra és $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra:

$p(A) = q(A) \Leftrightarrow p$ és q az A spektrumán megegyeznek.

B Legyen $h(x) = p(x) - q(x) \in \mathbb{C}[x]$.

$p(A) = q(A) \Leftrightarrow h(A) = 0 \Leftrightarrow m_A(x) \mid h(x)$

$\Leftrightarrow h$-nak a λ_i legalább b_i-szeres gyöke $\forall i$-re

$\Leftrightarrow h^{(j)}(\lambda_i) = 0\ \forall 0 \leqslant j \leqslant b_i - 1$-re és $\forall i$-re

$\Leftrightarrow p^{(j)}(\lambda_i) = q^{(j)}(\lambda_i)\ \forall 0 \leqslant j \leqslant b_i - 1$-re és $\forall i$-re.

D Ha f definiálva van A spektrumán, és $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ olyan polinom, amely az A spektrumán megegyezik $f(x)$-szel, akkor $f(A) := p(A)$. (Az előző állítás miatt ez jól van definiálva, ha van ilyen polinom.)

T **Hermite-interpoláció**

Legyen $K \leqslant \mathbb{C}$ test, legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ különbözők, és $f_{ij} \in K$ $(i = 1, \ldots, k,\ j = 0, \ldots, b_i - 1)$ adott értékek, ahol $\sum b_i = m$. Ekkor $\exists!$ $p(x) \in K[x]$ polinom, amelyre $\deg p \leqslant m - 1$, és $p^{(j)}(\lambda_i) = f_{ij}$ $\forall i, j$.

B A $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m-1} x^{m-1}$ polinom ismeretlen eh-ira a feltételek egy lin. er.-t adnak, $m \times m$-es M együtthatómátrixszal, és $\mathbf{f} = [f_{ij}]_{m \times 1}$ konstans oszloppal: $M\mathbf{c} = \mathbf{f}$.
Ha $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, akkor az er-nek csak triviális megoldása van, ui. ha $p(x)$ megoldás, és nem a 0 polinom, akkor $p^{(j)}(\lambda_i) = 0$ $\forall i, j \Rightarrow$
λ_i legalább b_i-szeres gyöke $p(x)$-nek $\Rightarrow \deg p(x) \geqslant \sum b_i = m$ ↯.
Így $|M| \neq 0 \Rightarrow M\mathbf{c} = \mathbf{f}$-nek $\exists!$ megoldása $\forall \mathbf{f}$-re.

K $\exists f(A)$ minden olyan f-re, ami értelmezve van az A spektrumán.

Mj $\exists$ a Lagrange-interpolációhoz hasonló explicit képlet az Hermite-polinomra, de a bizonyításban szereplő egyenletrendszerrel is meg lehet határozni a polinomot.

Mj Nem kell feltétlenül ismerni a minimálpolinomot az $f(A)$ kiszámítására, lehet a $\prod(\lambda_i - x)^{a_i}$ karakterisztikus polinom alapján és az $f^{(j)}(\lambda_i)$ $(j = 0, \ldots, a_i - 1)$ értékekhez keresni az interpolációt. Ez több feltételt jelent, és esetleg magasabb fokú polinomot kapunk, de ez is ugyanazt a $p(A)$-t adja.

P Az Hermite-interpoláció nem működik tetszőleges test fölött.
Pl. a $K = \mathbb{Z}_2$ test fölött a
$p(1) = 1$, $p'(1) = 0$, $p''(1) = 0$-ra 1 és x^2 is megoldás,
$p(1) = 1$, $p'(1) = 0$, $p''(1) = 1$-re nincs megoldás (magasabb fokú sem).

P Számitsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix 10. hatványát Hermite-interpolációval!

m $k_A(x) = (x-2)^2$, és $A \neq 2I \Rightarrow m_A(x) = (x-2)^2$.

Kell: $p(x) = a + bx$, ami A spektrumán megegyezik $f(x) = x^{10}$-nel.

$$\begin{array}{lll} p(x) = a + bx & f(x) = x^{10} & p(2) = a + 2b = 2^{10} \\ p'(x) = b & f'(x) = 10x^9 & p'(2) = b = 10 \cdot 2^9 \end{array} \Rightarrow$$

$b = 10 \cdot 2^9 = 5 \cdot 2^{10}, \quad a = -9 \cdot 2^{10} \Rightarrow$

$$A^{10} = -9 \cdot 2^{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 5 \cdot 2^{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 2^{10} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

F $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^A =?$

m $k_A(x) = -(x-1)^3.$

$$\begin{array}{lll} p(x) = a + bx + cx^2 & f(x) = e^x & p(1) = a + b + c = e \\ p'(x) = b + 2cx & f'(x) = e^x & p'(1) = b + 2c = e \\ p''(x) = 2c & f''(x) = e^x & p''(1) = 2c = e \end{array} \qquad \Rightarrow$$

$c = \frac{1}{2}e,\ b = 0,\ a = \frac{1}{2}e.$

$$e^A = \frac{1}{2}e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

F Számítsuk ki az alábbi mátrix valamelyik négyzetgyökét Hermite-interpolációval!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

m $k_A(x) = -(x-1)^2(x-4), \quad m_A(x) = (x-1)^2(x-4), \quad f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{array}{lll} p(x) = a + bx + cx^2 & f(x) = \sqrt{x} & p(1) = a + b + c = 1 \\ p'(x) = b + 2cx & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & p'(1) = b + 2c = \frac{1}{2} \\ & & p(4) = a + 4b + 16c = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow c = -\tfrac{1}{18}, \ \ b = \tfrac{11}{18}, \ \ a = \tfrac{4}{9} \Rightarrow p(x) = \tfrac{1}{18}(8 + 11x - x^2)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ és } \sqrt{A} = \tfrac{1}{18}(8I + 11A - A^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 5/18 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mátrixhatványok konvergenciája

D $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ spektrálsugara: $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\}$

T **O-hoz konvergálás**

Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra

$$\lim_{k\to\infty} A^k = O \quad \Leftrightarrow \quad \rho(A) < 1$$

B $A = PJP^{-1} \Rightarrow A^k = PJ^kP^{-1}$, így elég Jordan-blokkokra nézni a O-hoz konvergálást. Egy $m \times m$-es J Jordan-λ-blokkra

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & \dots & \binom{k}{m-2}\lambda^{k-m+2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$: $\lim_{k\to\infty} J^k = O$ esetén $\lambda^k \to 0 \Rightarrow |\lambda| < 1$.

$\Leftarrow$: $|\lambda| < 1$ esetén $\left|\binom{k}{i}\lambda^{k-i}\right| \leqslant \frac{k^i|\lambda|^{k-i}}{i!} \to 0$, ha $k \to \infty$.

T **Hatványösszeg konvergenciája**

Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{ konvergens } \Leftrightarrow \rho(A) < 1,$$

és ez esetben $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$

B $\Rightarrow$: $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergens $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} J_i^k$ konvergens az A Jordan-alakjának minden Jordan-blokkjára $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ konvergens $\Rightarrow$ $|\lambda| < 1$.

$\Leftarrow$: $\rho(A) < 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{az 1 nem sajátérték, tehát } \exists (I-A)^{-1}, \text{ és} \\ \lim_{k\to\infty} A^k = O. \end{cases}$

$(I-A)(I+A+A^2+\dots A^{k-1}) = I - A^k \to I \Rightarrow$
$I + A + A^2 + \dots + A^{k-1} = (I-A)^{-1}(I-A^k) \to (I-A)^{-1}$

T **Hatványok konvergenciája**

Az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ pontosan akkor konvergens, ha

$$\begin{cases} \rho(A) < 1 & \text{vagy, ha} \\ \rho(A) = 1 & \text{ahol } \lambda = 1 \text{ az egyetlen 1 abszolút értékű sajátérték,} \\ & \text{és a } \lambda = 1 \text{ geometriai és algebrai multiplicitása azonos.} \end{cases}$$

Konvergencia esetén $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = P_1$, az $\mathcal{N}(A-I)$-re az $\mathcal{O}(A-I)$ mentén való vetítés mátrixa (az 1-hez tartozó spektrálvetítő).

B $\Rightarrow$: Ha $\rho(A) > 1$, a hatványok divergálnak, ha $\rho(A) < 1$, O-hoz konvergálnak. Marad a $\rho(A) = 1$ eset.
Ha a spektrálkörön van 1-től különböző sajátérték, akkor a hozzá tartozó Jordan-blokk hatványainak főátlóiban az $\mathrm{e}^{ki\varphi}$ hatványok végtelen osszcilláló sorozatot adnak, ami miatt A^k is divergens marad.

Ha $\lambda = 1$-hez tartozik egy $m > 1$ rendű Jordan-blokk, akkor annak hatványai divergensek: $\begin{bmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \dots & \binom{k}{m-1} \\ 0 & 1 & \dots & \binom{k}{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$: $A \sim J$ diag. blokkjai [1], és olyan λ-blokkok, ahol $|\lambda| < 1$, és mindegyiknek a hatványa konvergál.

Tfh. teljesül a spektrumra megadott feltétel. Ekkor $A \sim \mathrm{diag}(I, J_1, \dots, J_k)$, ahol J_i-k kis sajátértékű Jordan-blokkok. Így $J^k \to \mathrm{diag}(I, O)$, ami a $\mathcal{V}_1 = \bar{\mathcal{V}}_1$-re való vetítés mátrixa az ált. sajátalterekre való felbontás mentén. Ha ez a felbontás (a többi $\bar{\mathcal{V}}_\lambda$-t összevonva) $\mathbb{C}^n = \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}$, akkor $\mathrm{Ker}(A - I) = \mathcal{V}_1$, és $\mathrm{Im}(A - I) = (A - I)\mathcal{V} = (A - I)\mathcal{V}_1 + (A - I)\mathcal{W} = (A - I)\mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}$, mert $\mathcal{W}$ ált. sajátalterek összege, tehát A-invar. A dimenziók miatt ebből $\mathrm{Im}(A - I) = \mathcal{W}$.

Rekurzív sorozatok

Lineáris rekurzió

D *d-edrendű lineáris rekurzív sorozat* (vagy d-edrendű homogén lineáris differenciaegyenlet)

$$x_{n+d} = c_1 x_{n+d-1} + c_2 x_{n+d-2} + \ldots + c_d x_n,$$

Ha $c_1, c_2, \ldots, c_d$, és $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$ meg vannak adva, akkor a rekurzió meghatározza az $[x_n]_{n \geqslant 0}$ sorozatot.

Cél: Explicit képletet kapni x_n-re.

Vektorokat használva a d-edrendű rekurzióból elsőrendű lesz:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+d-1} \\ x_{n+d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+d-1} \\ c_d x_n + \ldots + c_1 x_{n+d-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ c_d & \ldots & \ldots & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+d-2} \\ x_{n+d-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+d-1} \end{bmatrix}$-re azt kaptuk, hogy $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$, ahol A^T az $m(x) = x^d - c_1 x^{d-1} - \ldots - c_{d-1}x - c_d$ polinom kísérőmátrixa, így $m_A(x) = m_{A^T}(x) = m(x)$ és $k_A(x) = \pm m_A(x)$.

$$\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1} = A^2\mathbf{x}_{n-2} = \ldots = A^n\mathbf{x}_0 = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{bmatrix}.$$

$A^n = PJ^nP^{-1}$. Ha J egy Jordan-blokkja

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ldots & & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k} \quad \Rightarrow \quad J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \ldots & \\ 0 & \lambda^n & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ldots & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

J^n elemei $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{k-1}\lambda^n$ alakú kifejezések fix (n-től független) együtthatós lineáris kombinációi,

ui. $\binom{n}{i}\lambda^{n-i} = \frac{1}{\lambda^i i!} n(n-1)\cdots(n-i+1)\lambda^n$

Tehát $x_n = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{a_i-1} \alpha_{ij} n^j \lambda_i^n$, ha $m(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{a_i}$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ különbözők. Az α_{ij} együtthatók kiszámíthatók az $x_0, \ldots, x_{d-1}$ értékekből.

D Az $x_{n+d} = c_1 x_{n+d-1} + c_2 x_{n+d-2} + \ldots + c_d x_n$ rekurzió karakterisztikus polinomja $k(x) = x^d - c_1 x^{d-1} - c_2 x^{d-2} - \ldots - c_{d-1}x - c_d$.

T Ha egy lineáris rekurzió karakterisztikus polinomja $k(x) = (x-\lambda_1)^{a_1}\cdots(x-\lambda_r)^{a_r}$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ különbözők, akkor $x_n = p_1(n)\lambda_1^n + \ldots + p_r(n)\lambda_r^n$ valamely $p_1(x), \ldots, p_r(x)$ polinomokra, amelyekre $\deg p_i(x) \leqslant a_i - 1$ $\forall i$.

A Fibonacci-sorozat explicit alakja

P A Fibonacci-sorozat $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Adjuk meg a sorozat n. tagját n függvényében!

m A sorozat karakterisztikus polinomja $k(x) = x^2 - x - 1$,
$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $k(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \Rightarrow$
$F_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+b &= 0 \\ \frac{1}{2}(a+b) + \frac{\sqrt{5}}{2}(a-b) &= 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

F Adjunk explicit képletet az $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ sorozatra!

m Karakterisztikus polinom:

$k(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2 \Rightarrow$

$x_n = a \cdot 1^n + (b + cn)2^n$

$$\begin{aligned} x_0: \quad & a + b &= 0 \\ x_1: \quad & a + 2b + 2c &= 1 \qquad \Rightarrow \\ x_2: \quad & a + 4b + 8c &= 5 \end{aligned}$$

$a = 1,\ b = -1,\ c = 1 \Rightarrow x_n = 1 + (n-1)2^n.$

F Számítsuk ki a $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{vmatrix}_{n \times n}$ determináns értékét!

m Első sor szerint, majd a második tagot az első oszlop szerint kifejtve a $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ rekurziót kapjuk, ahol $D_1 = 2$ és $D_2 = 3$.

Karakterisztikus polinom: $k(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad \Rightarrow$ $D_n = (a + bn) \cdot 1^n = a + bn$. Az első két tagból

$a + b = 2$ és $a + 2b = 3 \;\Rightarrow\; b = 1,\ a = 1,$

$D_n = n + 1.$

Differenciaegyenlet-rendszerek

D Elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \qquad \text{homogén}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n \qquad \text{inhomogén}$$

ahol $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2 \dots$ ismert vektorok, $\mathbf{x}_n$ ismeretlen, ha $n > 0$.

T Az elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer megoldása

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0, \qquad \text{(homogén)}$$

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}\mathbf{b}_i, \qquad \text{(inhomogén)}$$

ahol $n > 0$.

B Behelyettesítés $\checkmark$. A rekurzióból következik a mo. egyértelműsége.

F Milyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy az $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$ sorozat minden $\mathbf{b}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ vektorra konvergens? Mi a határérték?

m A tétel szerint $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0 + (I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1})\mathbf{b}$: ekkor $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ esetén $\forall\, \mathbf{b}$-re konv $\iff$ $I + A + \ldots + A^{n-1}$ konv $\iff$ $\rho(A) < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A^n = O,\ \lim\limits_{n\to\infty} I + A + \ldots + A^{n-1} = (I - A)^{-1} \Rightarrow$

$\mathbf{x}_n \to O\mathbf{x}_0 + (I - A)^{-1}\mathbf{b} = (I - A)^{-1}\mathbf{b}$, ami nem függ $\mathbf{x}_0$-tól.

P Konvergens-e az $\mathbf{x}_n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ sorozat? Mi a határértéke?

m $k(x) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - x \end{vmatrix} = x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$

$k(-1) > 0,\ k(0) < 0,\ k(1) > 0 \Rightarrow \rho(A) < 1 \Rightarrow$ a sorozat konvergens.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (I - A)^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

F Konvergens-e az $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} + 1$ sorozat? Mi a határértéke?

m $\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} - x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\rho(A) < 1 \Rightarrow$ a sorozat konvergens.

Mivel konv, tfh $x_n \to a$. Így $x_{n-1} \to a$, $x_{n+1} \to a$ és
$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a + 1 \Rightarrow a = 1.$

Mj Természetesen számolhatunk a mátrixinverzzel, de az itt több számolást igényel. Ellenőrzésül:

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$