Bevezetés az algebrába 2

Mátrixnormák

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Norma és metrika

D **Vektornorma**

Legyen $\mathcal{V}$ valós vagy komplex vektortér.

$\|.\| : \mathcal{V} \to [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ norma, ha $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorra és c skalárra

(1) $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(2) $\|c\mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$ (pozitív homogenitás),

(3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (szubadditivitás vagy $\triangle$-egyenlőtlenség)

P Az $|\mathbf{x}| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ norma $\mathbb{R}^n$-en és $\mathbb{C}^n$-en.

Mj (2) $\Rightarrow \|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$

(3) $\Rightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geqslant \big|\, \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \,\big|$,

ugyanis $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, mert $\|\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|$,

és $\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

D **metrikus tér:**

egy X halmaz, amelyen adva van egy $d : X \times X \to [0, \infty)$ metrika, azaz:

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$

(3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ ($\triangle$-egyenlőtlenség)

Á Egy $\|.\|$ normával ellátott valós vagy komplex vektortéren $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ metrika.

B $\geqslant 0$ ✓

(1): $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$

(2): $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \| - (\mathbf{y} - \mathbf{x})\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$

(3): $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z})\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

P Tetszőleges K testre K^n-en $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$ metrika, de nem norma által indukált metrika $K = \mathbb{R}$ vagy $K = \mathbb{C}$ esetén sem.

D $\mathbb{R}^n$-ben és $\mathbb{C}^n$-ben:

euklideszi norma: $\sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$

Manhattan-norma vagy összegnorma: $|x_1| + \ldots + |x_n|$

(Manhattan utcáin mekkora utat kell megtennie egy taxinak egy utcasaroktól egy másikig?)

Általánosan:

p-norma:

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

tetszőleges $p \geqslant 1$ valós számra.

Tehát az euklideszi norma a 2-norma, a Manhattan-norma az 1-norma.

Á A p-norma valóban norma $\mathbb{R}^n$-ben és $\mathbb{C}^n$-ben.

Csak a $\triangle$-egyenlőség kérdéses, és ezt mondja ki a

Minkowski-egyenlőtlenség: $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leqslant \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$ *(Nem biz.)*

A CSB-$\leqslant$ általánosítása:

Hölder-egyenlőtlenség:

$$|\mathbf{x}^*\mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\|_p \cdot \|\mathbf{y}\|_q \ , \qquad \text{ha } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

($p = q = 2$-re ez a CSB-$\leq$.)

D ∞-norma: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p$.

Á $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$
(Ezért a ∞-norma a maximumnorma.)

B Legyen x_i a maximális abszolút értékű komponens.

$$|x_i| = (|x_i|^p)^{1/p} \leqslant (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} \leqslant (n|x_i|^p)^{1/p} = n^{1/p} \cdot |x_i| \to |x_i|,$$

így a rendőrelv miatt $\|\mathbf{x}\|_p \to |x_i|$, ha $p \to \infty$.

F Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - i, 6i, 3)$ vektor normáját $\mathbb{C}^3$-ben és az $\mathbf{y} = (-1, 2, 1)$ és $\mathbf{z} = (2, 6, 6)$ távolságát $\mathbb{R}^3$-ben a p-norma szerint $p = 1, 2, 3, \infty$-re.

m

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_1 &= 2 + 6 + 3 = 11 & \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_1 &= 3 + 4 + 5 = 12 \\
\|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{4 + 36 + 9} = 7 & \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_2 &= \sqrt{9 + 16 + 25} \approx 7,1 \\
\|\mathbf{x}\|_3 &= \sqrt[3]{251} \approx 6,3 & \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_3 &= \sqrt[3]{27 + 64 + 125} = 6 \\
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max\{2, 6, 3\} = 6 & \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_\infty &= \max 3, 4, 5 = 5
\end{aligned}
$$

Mj $\|\mathbf{x}\|_1 \geqslant \|\mathbf{x}\|_2 \geqslant \|\mathbf{x}\|_\infty$ minden $|\mathbf{x}|$-re, mert

$$(|x_1| + \ldots + |x_n|)^2 \geqslant |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \geqslant \max_i |x_i|^2$$

T $\|\mathbf{x}\|_p \geqslant \|\mathbf{x}\|_q$, ha $p \leqslant q$

B **1.** $\|\mathbf{0}\|_p = \|\mathbf{0}\|_q = 0.$

2. $\|\mathbf{x}\|_p = 1 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_q \leqslant 1$:

$1 = \|\mathbf{x}\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p} \Rightarrow \sum |x_i|^p = 1 \Rightarrow |x_i| \leqslant 1\ \forall i$, és $q \geqslant p$, így $|x_i|^q \leqslant |x_i|^p\ \forall i. \Rightarrow$

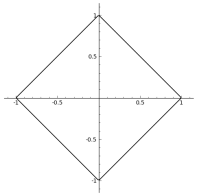
$$\|\mathbf{x}\|_q = \left(\sum |x_i|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/q} = \left(\left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}\right)^{p/q} = 1^{p/q} = 1.$$

3. $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}: \quad \|\mathbf{x}\|_q \leqslant \|\mathbf{x}\|_p$:

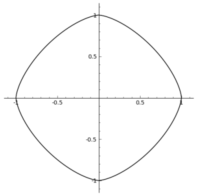
$\mathbf{y} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p}\mathbf{x}$-re $\|\mathbf{y}\|_p = 1 \overset{2.}{\Rightarrow} \|\mathbf{y}\|_q \leqslant 1.$ Így

$$\frac{\|\mathbf{x}\|_q}{\|\mathbf{x}\|_p} = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}\right\|_q = \|\mathbf{y}\|_q \leqslant 1$$

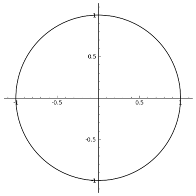
P Egységsugarú körök:



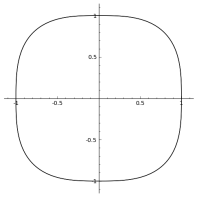
$p = 1$



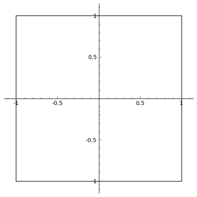
$p = \frac{3}{2}$



$p = 2$

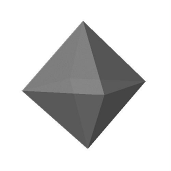


$p = 3$



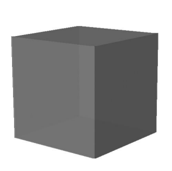
$p = \infty$

Egységsugarú gömbök:



$p = 1$

$p = 2$



$p = \infty$

Vektornormák ekvivalenciája

Mj Láttuk, hogy $\|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\|_1$.

Mj Másrészt igaz, hogy

$$\|\mathbf{x}\|_1 \overset{CSB}{\leqslant} \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2\,,\ \|\mathbf{x}\|_2 \overset{\checkmark}{\leqslant} \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \text{ és } \|\mathbf{x}\|_1 \overset{\checkmark}{\leqslant} n\,\|\mathbf{x}\|_\infty\,.$$

D A $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy $\|.\|_a \leqslant c\,\|.\|_b$ és $\|.\|_b \leqslant d\,\|.\|_a$.

K Az 1-, 2- és ∞-normák ekvivalensek

Á Minden p-norma ekvivalens $\mathbb{R}^n$-en, illetve $\mathbb{C}^n$-en.

B Elég, hogy mindegyik ekv. a ∞-normával.

Ha egy $\|.\|$ normára $c = \max_i \|\mathbf{e}_i\|$, akkor a normatulajdonságokból $\|\mathbf{x}\| \leqslant \sum |x_i|\,\|\mathbf{e}_i\| \leqslant c\,\|\mathbf{x}\|_1$. Így

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max|x_i| \leqslant \left(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p} = \|\mathbf{x}\|_p \leqslant c\,\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant cn\,\|\mathbf{x}\|_\infty$$

Általánosan is igaz:

T Az $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) téren értelmezett bármely két norma ekvivalens.

F Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n$-ben az euklideszi metrikában mérve legföljebb $n+1$ olyan pont van, melyek páronkénti távolsága azonos.

M Van $n+1$ ilyen pont: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ közül bármely kettő távolsága $\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\| = \sqrt{2}$, másrészt e vektorok végpontjai benne vannak az $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 1$ hipersíkban, ami n-dimenziós altér eltoltja, tehát távolságtartó módon ráképezhető az $\mathbb{R}^n$-re.

\- Nincs több: Tfh $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ és $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|$ azonos minden $i \neq j$-re. Feltehető, hogy $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ (különben a $\mathbf{v}_0$ vektort kivonjuk mindegyikből), és hogy minden távolság $\sqrt{2}$ (különben minden vektort egy megfelelő skalárral szorzunk).

\- Ekkor minden $i > 0$-ra $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 2$, $i \neq j$, $i, j > 0$-ra $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 1$, ui.

$$2 = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2 = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = \|\mathbf{v}_i\|^2 + \|\mathbf{v}_j\|^2 - 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 4 - 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j.$$

- Tekintsük az $A = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\dots|\mathbf{v}_k]_{n\times k}$ mátrixot. Ekkor

$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}_{k\times k}$$

- $A^\mathsf{T} A$ invertálható, ugyanis

$$|A^\mathsf{T} A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & k+1 & \dots & k+1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = k+1 \neq 0.$$

- $A^\mathsf{T} A$ invertálható $\Rightarrow \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\mathsf{T} A) = k \Rightarrow k \leqslant n \Rightarrow k+1 \leqslant n+1.$

F $|A| = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$

általánosabban és egyszerűbben, mint az előbb.

M $A = bJ + (a-b)I$, ahol J a csupa-1 mátrix.

$$J \sim D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A \sim bD + (a-b)I = \begin{bmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b+nb \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (a-b)^{n-1}(a-b+nb)$$

F Ábrázoljuk a $\{P \mid |d(P,F_2) - d(P,F_1)| = 1\}$ “hiperbolát”, ha $F_1 = (1,0)$, $F_2 = (-1,0)$, és d az 1-norma, illetve a ∞-norma által indukált metrika $\mathbb{R}^2$-en.

m Elég a $d(P,F_2) - d(P,F_1) = 1$ egyenletet megoldani, és hozzávenni az y tengelyre vett tükörképét.

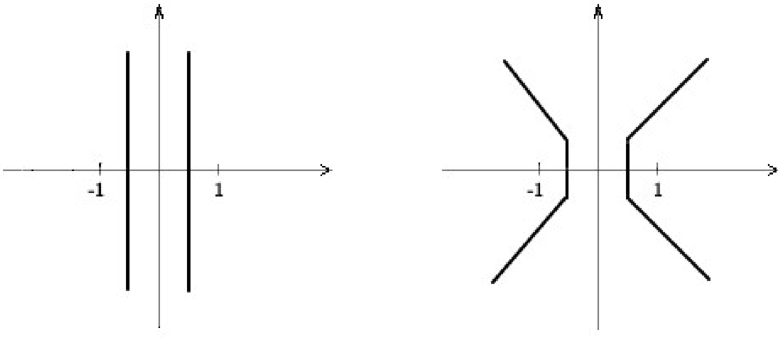
1-normára: (x,y) rajta van a görbén, ha
$|x+1| + |y| - |x-1| - |y| = 1$, azaz $|x+1| - |x-1| = 1$, és ennek a megoldása $x = \frac{1}{2}$, y tetsz.

∞-normára: (x,y) rajta van a görbén, ha
$\max\{|x+1|, |y|\} - \max\{|x-1|, |y|\} = 1$.

A maximum nem lehet mindkettőnél az $|y|$.

Ha a maximum mindkettőnél az első tag, akkor az 1-norma egyenletét kapjuk, tehát $x = \frac{1}{2}$, és $|y| \leqslant |x-1| = \frac{1}{2}$.

Ha az egyiknél az $|y|$ a maximális, a másiknál nem, akkor csak $|x+1| \geqslant |y| \geqslant |x-1|$ lehet, így $|x+1| = |y| + 1 \geqslant |x-1| + 1$, amiből $x \geqslant \frac{1}{2}$, és $1 = |x+1| - |y| = (x+1) - |y|$, vagyis $y = \pm x$.


-1
1
-1
1

Vektornorma mátrixokon

D Az $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|A_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|A_{*j}\|_2^2}.$$

T Frobenius-norma ekvivalens alakjai:

$$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r(A)}\sigma_i^2}.$$

B $(A^*A)_{jj} = \|A_{*j}\|_2^2$

nyom = sajátértékek összege

Á Bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra és $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixra $\|A\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|A\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.

B Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből:

$$\|A\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}|A_{i*}\mathbf{x}|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|A_{i*}\|_2^2\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|A\|_F^2\|\mathbf{x}\|_2^2.$$

A mátrixnorma általános fogalma

D **Mátrixnorma:**

$\|.\| : K^{n\times n} \to [0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$, ahol $K = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$, és

(1) $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = O$,

(2) $\|cA\| = |c|\,\|A\|$,

(3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$,

(4) $\|AC\| \leqslant \|A\|\,\|C\|$.

D **Vektornorma által indukált mátrixnorma:**

$\|.\|$ vektornormára az indukált norma: $\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$

Jelölés: $\|A\|_p := \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|A\mathbf{x}\|_p$ ($m \times n$-esre is)

Mj Ha lineáris leképezésre értelmezzük, operátornormáról beszélünk.

Mj $\mathbb{R}^n$, illetve $\mathbb{C}^n$ normái ekvivalensek $\Rightarrow$ bármely norma szerinti egységgömb korlátos és zárt $\Rightarrow$ az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ függvénynek van maximuma és minimuma, így értelmes a definíció.

Á Ekvivalens alakok: $\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|\neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|\neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$. **B:** ✓

K $\|A\mathbf{x}\| \leqslant \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

Á A Frobenius-norma mátrixnorma

B (1), (2), (3) igaz, mert $\|.\|_F$ a $K^{n\times n}$-ben $= \|.\|_2$ a K^{n^2}-ben.

(4) korábban biz.: $\|A\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|A\|_F \|\mathbf{x}\|_2 \Rightarrow$
$\|AB\|_F^2 = \|A[\mathbf{b}_1|\dots|\mathbf{b}_n]\|_F^2 = \|[A\mathbf{b}_1|\dots|A\mathbf{b}_n]\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|A\mathbf{b}_i\|_2^2 \leqslant$
$\|A\|_F^2 \sum \|\mathbf{b}_i\|_2^2 = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$

Á Az indukált norma mátrixnorma.

B (1): $A \neq O \Rightarrow \exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\colon A\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \dfrac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} > 0$

(2): $\max\{\|cA\mathbf{x}\| : \|\mathbf{x}\| = 1\} = \max\{|c|\,\|A\mathbf{x}\| : \|\mathbf{x}\| = 1\} =$
$|c| \max\{\|A\mathbf{x}\| : \|\mathbf{x}\| = 1\}$

(3):
$\forall\, \|\mathbf{x}\| = 1\colon \|(A+B)\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x} + B\mathbf{x}\| \leqslant \|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

(4): $\forall\, \|\mathbf{x}\| = 1\colon \|(AB)\mathbf{x}\| = \|A(B\mathbf{x})\| \leqslant \|A\|\,\|B\mathbf{x}\| \leqslant \|A\|\,\|B\|\,\|\mathbf{x}\| =$
$\|A\|\,\|B\|$

Mj A Frobenius-norma nem lehet indukált norma, mert $\|I\|_F \neq 1$.

Az 1-, 2- és ∞-norma mátrixokra

T **Mátrixnormák kiszámítása**

Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ekkor

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút oszlopösszeg,} \tag{1}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút sorösszeg,} \tag{2}$$

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^* A\mathbf{x}| = \sigma_1, \tag{3}$$

T Ha az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható, akkor

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|A\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sigma_n}, \tag{4}$$

ahol σ_n az A legkisebb (pozitív) szinguláris értéke.

Mj Az 1-, a ∞- és a 2-normára szokásos másik elnevezés: oszlopnorma, sornorma és spektrálnorma.

B $p=1$: ha $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$, akkor

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

A max elérhető: ha a k. oszl.össz. a max $\Rightarrow$ $\|A\mathbf{e}_k\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$

$p=\infty$: ha $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, akkor

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Ez a maximum el is érhető: ha a k-adik sor a max, és

$\mathbf{x} = (a'_{k1}, \dots, a'_{kn})$, ahol $\quad a'_{kj} = \begin{cases} \frac{\overline{a_{kj}}}{|a_{kj}|} & \text{ha } a_{kj} \neq 0 \\ 1 & \text{ha } a_{kj} = 0 \end{cases}$

akkor $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ és $\|A\mathbf{x}\|_\infty = \sum_{j=1}^{n}|a_{kj}| = \max_i \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

$p=2$: $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$-re:

$$|\mathbf{y}^* A\mathbf{x}| \overset{\text{CSB}}{\leqslant} \|\mathbf{y}\|_2 \|A\mathbf{x}\|_2 = \|A\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|A\|_2$$

Az $\|A\|_2$ el is érhető, ha végig $=$ van, azaz ha $\mathbf{x}$ az a vektor, ahol $\|A\mathbf{x}\|_2$ eléri a maximumát, és $\mathbf{y}$ párhuzamos ezzel, és egységvektor, azaz $\mathbf{y} = \frac{A\mathbf{x}}{\|A\mathbf{x}\|_2}$ megfelel.
Az $\|A\|_2 = \sigma_1$ igazolásához írjuk fel az A SVD felbontását: $A = U\Sigma V^*$. Vegyük észre, hogy

$$\|\Sigma\mathbf{x}\|_2 = \|(\sigma_1 x_1, \sigma_2 x_2, \ldots)\|_2 = \sqrt{\sum \sigma_i^2 |x_i|^2} \leqslant \sigma_1 \sqrt{\sum |x_i|^2} = \sigma_1 \|\mathbf{x}\|_2$$

Tehát

$$\|A\mathbf{x}\|_2 = \|U\Sigma V^*\mathbf{x}\|_2 \overset{(1)}{=} \|\Sigma V^*\mathbf{x}\|_2 \overset{(2)}{\leqslant} \sigma_1 \|V^*\mathbf{x}\|_2 \overset{(3)}{=} \sigma_1 \|\mathbf{x}\|_2,$$

ahol (1): U unitér

(2): az előző egyenlőtlenségből

(3): V unitér.

Tehát $\|A\|_2 \leqslant \sigma_1$, másrészt van is olyan $\mathbf{x}$, amellyel egyenlőséget kapunk: (2)-ben $=$ van, ha $V^*\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, azaz ha $\mathbf{x} = V\mathbf{e}_1$.

B (4)-es képlet: Tfh. A invertálható.
Ekkor A^{-1} szinguláris értékei $\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \ldots, \frac{1}{\sigma_n}$, és ezek közül $\frac{1}{\sigma_n}$ a legnagyobb.

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A^{-1}\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A^{-1}A\mathbf{x}\|_2}{\|A\mathbf{x}\|_2} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|A\mathbf{x}\|_2} =$$
$$= \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{1}{\|A\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2} = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|A\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2}$$

K Ha U unitér, akkor $\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2$,
ugyanis $(UA)^*(UA) = A^*A$, és $(AU)^*AU = U^{-1}A^*AU$, tehát ezeknek és A^*A-nak ugyanaz a spektruma, és így A, UA és AU szinguláris értékei megegyeznek.

P Számítsuk ki a Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

m $\|A\|_F = 5$, $\|A\|_1 = 6$, $\|A\|_2 = 5$, $\|A\|_\infty = 6$
$\|B\|_F = 5$, $\|B\|_1 = 7$, $\|B\|_2 = 5$, $\|B\|_\infty = 4$
$\|C\|_F = \sqrt{13}$, $\|C\|_1 = 4$, $\|C\|_2 = 3$, $\|C\|_\infty = 4$,
$\|D\|_F = 2\sqrt{2}$, $\|B\|_1 = 3$, $\|B\|_2 = \sqrt{4+\sqrt{6}}$, $\|B\|_\infty = 2+\sqrt{2}$

F Bizonyítsuk be, hogy normális A mátrixra $\|A\|_2 = \rho(A)$.

m Ha A sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ahol $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$, és V olyan unitér, amelyre
$A = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^{-1} = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^*$, akkor

$$A = U \operatorname{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) V^*$$

SVD-felbontás (ahol U-t úgy kapjuk V-ből, hogy az első $r = r(A)$ oszlopát rendre $\lambda_1/|\lambda_1|$-gyel, …, $\lambda_r/|\lambda_r|$-rel megszorozzuk).
Így $\|A\|_2 = \sigma_1 = |\lambda_1| = \rho(A)$.

F Számítsuk ki a Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normát!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

m A Frobenius-, 1- és ∞-normák könnyen leolvashatók:

$\|A\|_F = 9$, $\|A\|_1 = 8$, $\|A\|_\infty = 8$.

$\|B\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|B\|_1 = 5$, $\|B\|_\infty = 5$.

$\|C\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|C\|_1 = 5$, $\|C\|_\infty = 5$.

$A^*A = \mathrm{diag}(16, 1, 64) \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{64} = 8$.

B egy ortogonális mátrix 3-szorosa, tehát normális is, így a maximális szinguláris értéke megegyezik a spektrálsugarával. Unitér mátrix spektrálsugara 1, így $\|B\|_2 = \rho(B) = 3 \cdot 1 = 3$.

$C^*C = 8J + I$, és J spektruma $\{0, 0, 3\}$, így C^*C spektruma $1, 1, 25$ $\Rightarrow \|C\|_2 = \sigma_1 = 5$.

(Mellesleg $C^*C = CC^*$, így a spektrálsugara is 5.)

T

Eckart–Young-tétel 2-normára

Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $r(A) = r$, és $A = U\Sigma V^*$ az A SVD felbontása. Ekkor $k \leqslant r$-re

$$A^{(k)} = U^{(k)}\Sigma^{(k)}\left(V^{(k)}\right)^*$$

az A legjobb k rangú közelítése abban az értelemben, hogy $\forall B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixra, $r(B) \leqslant k$ esetén

$$\|A - B\|_2 \geqslant \left\|A - A^{(k)}\right\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

($U^{(k)}$ és $V^{(k)}$ az U, illetve V első k oszlopából álló mátrix, $\Sigma^{(k)}$ pedig Σ bal fölső $k \times k$-as részmátrixa.)

B Legyen $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ legföljebb k rangú, és $\tilde{B} = U^*BV$, azaz $B = U\tilde{B}V^*$, továbbá legyen $\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma^{(k)} & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}$

Ekkor $\|A - B\|_2 = \left\|U(\Sigma - \tilde{B})V^*\right\|_2 = \left\|\Sigma - \tilde{B}\right\|_2$.

$r(\tilde{B}) \leqslant k \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \tilde{B} \geqslant n - k \Rightarrow$

$\exists \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{k+1}, 0, \dots, 0) \in \operatorname{Ker} \tilde{B}$ nem nulla vektor. Erre

$$\left\|(\Sigma - \tilde{B})\mathbf{x}\right\|_2 = \|\Sigma\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 |x_i|^2} \geqslant \sigma_{k+1} \|\mathbf{x}\|_2$$

$\Rightarrow \|(A - B)\|_2 = \left\|\Sigma - \tilde{B})\right\|_2 \geqslant \sigma_{k+1}$.

Másrészt $A^{(k)} = U\tilde{\Sigma}V^*$, és $\Sigma - \tilde{\Sigma}$ valós diagonális, így normális, ezért $\left\|A - A^{(k)}\right\|_2 = \left\|\Sigma - \tilde{\Sigma}\right\|_2 = \rho(\Sigma - \tilde{\Sigma}) = \sigma_{k+1}$.

Tehát $\|A - B\|_2 \geqslant \left\|A - A^{(k)}\right\|_2$.

P Adjunk 2- illetve Frobenius-normában legjobb 1-rangú közelítést az $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixra! 1-normában is ez van hozzá a legközelebb?

M $k_A(x) = x^2 - x - 6$, sajátpárok $(3, (1, 2))$, $(-2, (-2, 1))$, és A valós szimmetrikus $\Rightarrow$

SVD: $A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

legjobb közelítés: $B = A^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [3] \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$

az eltérés: $\|A - B\|_F = \|A - B\|_2 = \sigma_2 = 2$

másrészt $\|A - B\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \right\|_1 = \frac{12}{5}$

1-normában van jobb közelítés, pl.

$$\left\| A - \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \right\|_1 = \frac{11}{5}$$