Bevezetés az algebrába 2

Gráfok

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Gráfok spektruma

Gráfok szomszédsági és illeszkedési mátrixa

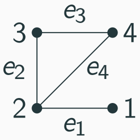
D Legyen Γ egyszerű gráf (irányítatlan, hurokélek nélküli, csak egyszeres élek), csúcsai $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, élei $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$.

Γ szomszédsági mátrixa $A_{n\times n}$, ahol $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } (v_i, v_j) \text{ él} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

Γ illeszkedési mátrixa $B_{k\times n}$, ahol $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } e_i \text{ illeszkedik } v_j\text{-hez} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

Mj A szimmetrikus mátrix, diagonális elemei 0-k.

P



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F Mit ad meg a B^TB, BB^T, A^2, A^k mátrix, ha B az illeszkedési, A a szomszédsági mátrix?

m $B^TB = A + \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, ahol d_i a v_i fokszáma.
BB^T átlójában csupa 2 van, máshol 0 vagy 1. $(BB^T)_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ az e_i és e_j él csatlakozik egymáshoz.
$(A^2)_{ij}$ azt mondja meg, hogy v_i-nek és v_j-nek hány közös szomszédja van ($i = j$ esetén a fokszámot)
$(A^k)_{ij}$ az i-ből j-be menő k hosszú séták száma: Indukcióval k-ra:
$(A^k)_{ij} = (A^{k-1} \cdot A)_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} (A^{k-1})_{is} a_{sj} =$
$|\{(k-1) \text{ hosszú séták } i \to s\}| \cdot |\{\text{élek } s \to j\}| =$
$|\{k \text{ hosszú séták } i \to j\}|$.

F Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az A sajátértékei (multiplicitással), akkor $\sum \lambda_i^m =$?.

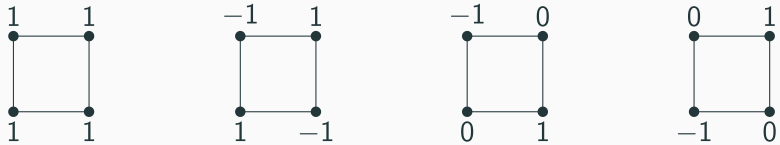
m $A \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (A valós szimmetrikus $\Rightarrow$ diagonalizálható) $\Rightarrow$ $A^m \sim \mathrm{diag}(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m) \Rightarrow \sum \lambda_i^m = \mathrm{tr}\, A^m$ az m hosszú körséták száma.

D **Gráf spektruma:**

a gráf szomszédsági mátrixának a spektruma.

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sajátvektor λ sajátértékkel $\Leftrightarrow$ Ha a Γ $v_1, \ldots, v_n$ csúcsaiba rendre az $x_1, \ldots, x_n$ számokat írjuk, majd ezt lecseréljük minden csúcsban a szomszédos számok összegére, akkor mindenhol λ-szorosára változik a csúcsbeli szám.

P Adjuk meg egy 4 hosszú kör spektrumát és egy sajátbázist!



A spektrum $\{2, -2, 0, 0\}$.

Észrevétel: minden nemüres gráfnak van pozitív és negatív sajátértéke is, mert a mátrix nyoma 0.

T **Páros gráf spektruma**

Γ páros gráf $\Leftrightarrow$ a spektruma szimmetrikus, azaz

ha $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \lambda_n$ a sajátértékei,

akkor $\lambda_n = -\lambda_1$, $\lambda_{n-1} = -\lambda_2$, ...

B ($\Rightarrow$) G páros gráf $\Rightarrow$ A_Γ blokkmátrix alakja

$$A = \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ha $(\lambda, (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ sajátpár, akkor $(-\lambda, (\mathbf{u}, -\mathbf{v}))$ is, ui.

$$\begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\mathbf{v} \\ B^T\mathbf{u} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B\mathbf{v} \\ B^T\mathbf{u} \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix}$$

Ftln vektororkból ftln-ek lesznek $\Rightarrow \dim \mathcal{V}_\lambda = \dim \mathcal{V}_{-\lambda}$

($\Leftarrow$) szimmetrikus a spektrum $\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{2k+1} = 0 \Rightarrow$ a páratlan körök száma 0 $\Rightarrow$ G páros.

T Spektrálsugár becslése. Ha Γ átlagos fokszáma $\bar{d}$, és a legnagyobb fokszám D, továbbá A sajátértékei $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, akkor $\bar{d} \leqslant \lambda_1 = \rho(A) \leqslant D$.

B $\rho(A) = \lambda_1$: $\rho(A) = \max\{\lambda_1, |\lambda_n|\}$, és ha $|\lambda_n| > \lambda_1$, akkor $\exists m$: $\sum \lambda_i^{2m+1} < 0$ ↯

$\lambda_1 \leqslant \rho(A) \leqslant D$: A Gersgorin-körök: $|z - 0| \leqslant d_i$, ahol $d_1, \ldots, d_n$ a fokszámok. $\Rightarrow |\lambda_i| \leqslant D\ \forall i \Rightarrow \lambda_1 \leqslant \rho(A) \leqslant D$.

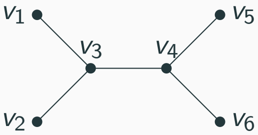
$\bar{d} \leqslant \lambda_1$: Legyen $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)^T$. Erre $|\mathbf{v}| = 1$, és

$$\mathbf{v}^T A\mathbf{v} = \frac{1}{n}[1\ 1 \ldots 1]A\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{n}[1\ 1 \ldots 1]\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix} = \frac{1}{n}\sum d_i = \bar{d},$$

másrészt $\mathbf{v}^T A\mathbf{v} \leqslant \max\limits_{|x|=|y|=1} \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \|A\|_2 = \sigma_1 = \rho(A)$, mert A szimmetrikus.

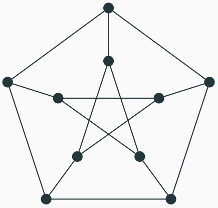
Így $\bar{d} \leqslant \rho(A) = \lambda_1$.

F Határozzuk meg az alábbi gráf spektrumát!



m (Páros gráf $\Rightarrow$ a spektruma szimmetrikus az origóra.)
$\lambda = 0$ sajátérték-e? Ha $\mathbf{x}$ λ-sajátvektor, akkor a levelek miatt
$x_3 = x_4 = 0$, és v_3, v_4 miatt $v_1 = a$, $v_2 = -a$, $v_5 = b$, $v_6 = -b$.
$\Rightarrow$ A 0-hoz tartozó sajátaltér 2-dimenziós.
Ha $\lambda \neq 0$ sajátérték: $x_1 = 0$ esetén $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $\dots$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ↯.
Tehát $x_1 \neq 0$, így feltehető, hogy $x_1 = 1$. Ebből
$x_3 = \lambda, \quad x_2 = 1, \quad x_4 = \lambda^2 - 2, \quad x_5 = \frac{\lambda^2-2}{\lambda}, \quad x_6 = \frac{\lambda^2-2}{\lambda}$
$\lambda x_4 = x_3 + x_5 + x_6 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda = \frac{3\lambda^2-4}{\lambda} \Rightarrow \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow$
$\lambda = \pm 1, \pm 2$, és ezekre jó is az előbbi sajátvektor:
$1: \ (1,1,1,-1,-,1-1)$, $-1: \ (1,1,-1,-1,1,1)$, $2: \ (1,1,2,2,1,1)$,
$-2: \ (1,1,-2,2,-1,-1)$. $\Rightarrow$ A spektrum $\{0,0,1,-1,2,-2\}$.

D Petersen-gráf:



F Lássuk be, hogy ha az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz kételemű részhalmazait vesszük egy gráf csúcsainak, és a diszunktakat kötjük össze éllel, akkor Petersen-gráfot kapunk.

F Határozzuk meg a Petersen-gráf spektrumát (multiplicitásokkal):

m Vegyük észre, hogy a Petersen-gráfban

- minden fokszám 3 (azaz a gráf 3-reguláris)
- az átmérő 2
- nincs háromszög és négyszög $\Rightarrow$
- két összekötött csúcsnak nincs közös szomszédja
- két összekötetlennek pontosan egy közös szomszédja van.

Legyen A a gráf szomszédsági mátrixa. Az előbbi tulajdonságokból következik, hogy

$$(A^2)_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } a_{ij} = 1 \\ 1 & \text{ha } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A^2 + A = J + 2I$, ahol J a csupa-1 mátrix.

Az $\mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1)$ vektor sajátvektora A-nak (3 sajátértékkel) és J-nek (10 sajátértékkel), s mivel $J + 2I$-nek csak egydimenziós az $\mathbf{1}$-et tartalmazó sajátaltere, A-nak is egyszeres sajátértéke a 3.

Mivel szimmetrikus mátrixokról van szó, a sajátalterek merőlegesek, tehát A többi sajátaltere a $\mathcal{W} = \mathbf{1}^\perp$ altérben van, és $\mathcal{N}(J) = \mathcal{W}$.

Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak $\lambda \neq 3$ sajátértékkel, akkor $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$, így $(\lambda^2 + \lambda)\mathbf{v} = (A^2 + A)\mathbf{v} = (J + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0} + 2\mathbf{v} \;\Rightarrow\; \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1$ vagy -2

Tfh 1 multiplicitása k és -2 multiplicitása ℓ. Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} k+\ell=9 \\ \operatorname{tr} A=0 \;\Rightarrow\; k-2\ell+3=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow k=5 \text{ és } \ell=4.$$

Tehát a Petersen-gráf spektruma multiplicitásokkal

$1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2, 3.$

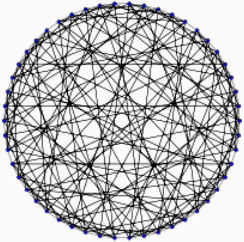
T (Hoffman–Singleton-tétel) Ha Γ r-reguláris gráf, amely $\triangle$- és $\square$-mentes, és az átmérője 2, akkor $r = 2, 3, 7$ vagy 57.

(A feltételekből $n = 1 + r + r(r-1) = r^2 + 1$ következik. A spektrumra megoldjuk a Petersen-gráféhoz hasonló egyenleteket, és kiderül, hogy k, ℓ és r csak ezekben az esetekben egész.)

$r = 2$: ötszög

$r = 3$: Petersen-gráf

$r = 7$: Hoffman–Singleton-gráf $\rightarrow$



A Petersen-gráf 3-reguláris és 15-élű, ugyanezen az alaphalmazon a K_{10} teljes gráf 9-reguláris és 45-élű. Ki lehet-e színezni a K_{10} éleit három színnel úgy, hogy minden szín egy Petersen-gráfot ad?

T **A három Petersen-gráf tétele**

A K_{10} teljes gráfot nem lehet három Petersen-gráfra osztani.

B Ha lehetne, akkor a három Petersen-gráf szomszédsági mátrixait A, B, C-vel jelölve,

$$A + B + C = J - I$$

Az A és B 1-hez tartozó sajátaltere is benne van a $\mathcal{W} = \mathbf{1}^{\perp}$ 9-dimenziós altérben, és 5-dimenziósak, ezért metszik egymást. Legyen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ mindkettőben benne. Ekkor

$$A + B + C = J - I \Rightarrow C\mathbf{v} = J\mathbf{v} - I\mathbf{v} - A\mathbf{v} - B\mathbf{v} = \mathbf{0} - \mathbf{v} - \mathbf{v} - \mathbf{v} = -3\mathbf{v}$$

így C-nek sajátértéke lenne a -3. $\lightning$

F Lássuk be, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör, azaz olyan kör, amely minden csúcsot egyszer érint.

m Tfh van Hamilton-kör. Ha ezt kitöröljük a gráfból, akkor egy 1-reguláris gráfot, azaz 1-faktort kapunk. Tehát a Petersen-gráf szomszédsági mátrixa:

$$A = H + F$$

ahol H a Hamilton-körnek, F az 1-faktornak a szomszédsági mátrixa. Világos, hogy az 1-faktor sajátértékei 1 és -1, mindkettő 5-dimenziós sajátaltérrel, és az utóbbi benne van $\mathbf{1}^{\perp}$-ben (mivel az $\mathbf{1}$ az 1-hez tartozó egyik sajátvektor), ahogy a Petersen-gráf 1-hez tartozó, szintén 5-dimenziós sajátaltere is $\mathbf{1}^{\perp}$-ben van.
$\Rightarrow$ Ez a két altér metszi egymást, így $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$: $F\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ és $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$
$\Rightarrow H\mathbf{x} = A\mathbf{x} - F\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x} = 2\mathbf{x}$.
Ha $\mathbf{x}$ komponenseit a Hamilton-kör mentén indexeljük, ebből $x_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_{i+1})\ \forall i \Rightarrow x_1, \ldots, x_n, x_1$ számtani sorozat $\Rightarrow$ a differenciája 0 $\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathrm{span}(\mathbf{1})$ $\lightning$.

Lámpácskás játék*

A játék: Lights Out (1995)

5×5-ös táblán 25 világító gomb (lámpa).

Kezdetben a lámpák közül valahány világít.

Ha egy gombot megnyomunk, neki és a (függőleges és vízszintes) szomszédainak megváltozik az állapota.

Cél: elérni, hogy egyik lámpa se világítson.

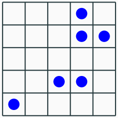
Kérdés:

1. Meg lehet-e oldani a feladatot minden kezdeti állapotról?
2. Ha nem, hogyan lehet megmondani, hogy egy kezdeti állapotra a feladat megoldható-e?

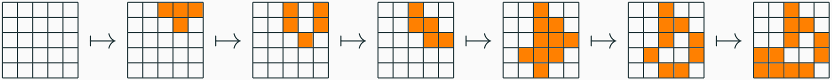
Észrevételek:

- Mindegy, hogy milyen sorrendben nyomjuk meg a gombokat, mindegyik lámpa állapotát csak az határozza meg, hogy a környezetében hány gombnyomás történt.
- 2-szeres gombnyomás = 0 gombnyomás

P Mi a hatása az alábbi gombnyomáshalmaznak (hívjuk az ilyet konfigurációnak), ha leoltott lámpákkal kezdünk?



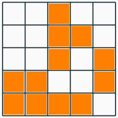
m Egyenként:



Szomszédszámolással:

0	0	1	2	2
0	0	1	3	2
0	0	1	2	1
1	1	2	2	1
1	1	1	1	0

$\Rightarrow$



A modell

- A lámpák egy helyzete leírható egy $\mathbb{Z}_2^{25}$-beli vektorral.
- Minden i-re az i. gombhoz hozzárendeljük azt a $\mathbf{v}_i$ vektort, ami a gomb megnyomására áll elő a teljesen leoltott lámpákból, azaz a táblabeli környezetében csupa 1 áll, a többi helyen 0.
- Az i. gomb megnyomása: $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{v}_i$
- Egy $\mathbf{v}$ kezdeti állapotból el lehet jutni a $\mathbf{0}$-ig
  $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0}$-ból el lehet jutni $\mathbf{v}$-ig $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} \in \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{25})$.
- Minden kiinduló helyzet megoldható $\Leftrightarrow$ $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{25}) = \mathbb{Z}_2^{25}$
  $\Leftrightarrow$ a $\mathbf{v}_i$ vektorok lineárisan függetlenek.
- Kérdés tehát: találunk-e olyan $\mathbf{x} \neq 0$ vektort, hogy $\sum x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, azaz van-e olyan nemtriviális konfiguráció, amely nem változtat a lámpák állásán, azaz amelyre igaz, hogy minden elem környezetében páros sok 1-es van?
  Legyen az ilyen $\mathbf{x}$ vektorok altere $\mathcal{W}$.

Megoldható minden játék?

Ha az $A \in \mathbb{Z}_2^{25\times 25}$ mátrix oszlopai a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{25}$ vektorok, akkor $\mathcal{W} = \mathcal{N}(A)$. Elég lenne az A mátrix rangját meghatározni Gauss-eliminációval...

$$A = \begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1
\end{bmatrix}$$

☹

$\mathcal{W}$ invariáns a négyzet egybevágóságaira, azaz azokra a lineáris transzformációkra, amelyek úgy hatnak a báziselemeken, ahogy az 5×5-ös négyzet kis négyzetein hat az adott egybevágóság.

Legyen $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$-re $\mathbf{x}'$ az $\mathbf{x}$ tükörképe a főátlóra, és $f : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{x}'$. Ekkor $\operatorname{Ker} f$ éppen a főátlóra szimmetrikus konfigurációkból áll, és minden $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ is szimmetrikus rá, tehát $\operatorname{Im} f \leqslant \operatorname{Ker} f$.

A dimenziótételből $\dim \mathcal{W} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$.

Könnyen látható, hogy ha $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} f$, akkor a főátló minden eleme 0, és ebből könnyen levezethető, hogy a másik átló is 0, és a többi elem mind egyenlő.

Tehát $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, amelyet az alábbi $\mathbf{z}$ vektor generál:

0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0

$\Rightarrow \dim \mathcal{W} = 1$ vagy 2.

Ha $\dim \mathcal{W} = 2$, akkor $\mathcal{W} = \{\mathbf{0}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, ahol $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, nem szimmetrikusak a főátlóra, tehát a tükrözés egymásba viszi őket.

Ebből a "ferdén szimmetrikus"szerkezetből a $\mathbf{z}$-hez hasonlóan kiszámolhatjuk az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ konfigurációkat is:

1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1

1	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	0	1

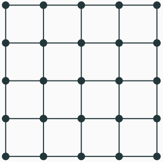
Ezek valóban $\mathcal{W}$-beliek, ezért $\dim \mathcal{W} = 2$.

Tehát nem oldható meg minden játék. Pontosabban, $|\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{25})| = 2^{23} = \frac{1}{4}|\mathcal{V}|$, így a játékoknak csak az egynegyede oldható meg.

Gráfokkal való kapcsolat

Mi köze ennek a gráfokhoz?

m A játékhoz rendelt A mátrix $A_\Gamma + I$, ahol Γ az 5×5-ös négyzetrács mint egyszerű gráf, és A_Γ a Γ szomszédsági mátrixa.



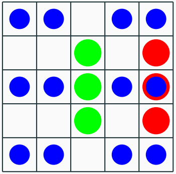
Tehát $\dim \mathcal{N}(A) = 2$ azt jelenti, hogy az 1 benne van Γ-nak a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test fölötti spektrumában, és a sajátaltér kétdimenziós.

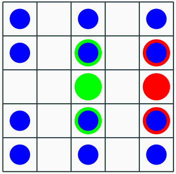
P Vigyázat! Általános test fölött nem igaz az, hogy a szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatók. Pl. az $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix hasonló az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Jordan-blokkhoz $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$-ben.

Milyen kiinduló helyzetből oldható meg a játék?

m Mivel A szimmetrikus (például, mert $A = A_\Gamma + I$), $\mathcal{W} = \mathcal{N}(A) = \mathcal{S}(A)^\perp = \mathcal{O}(A)^\perp$, azaz span$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{25})$ a $\mathcal{W}$ merőlegese. Így egy $\mathbf{v}$ vektor pontosan akkor van benne a generált altérben, ha merőleges $\mathbf{x}$-re és $\mathbf{y}$-ra, vagyis ha páros sok közös 1-ese van mindkettővel.

P Például az alábbi zöld kiinduló állás megoldható, a piros nem:





Mj Tetszőleges gráfra általánosíthatjuk a játékot.

F Mit mondhatunk a játék megoldhatóságáról a 7. oldal gráfján vagy egy ötszögön?