1. Bizonyítsuk be, hogy $U = \mathrm{span}((1,1,0,1),(0,-1,2,1))$ és $W = \mathrm{span}((0,1,0,0),(0,0,0,1))$ alterek direkt kiegészítői egymásnak! Írjuk fel az U-ra való W irányú vetítés standard mátrixát!

2. Tegyük fel, hogy f és g is vetítések a V vektortéren. Lássuk be, hogy $g \circ f$ általában nem vetítés (adjunk ellenpéldát!), de ha $\mathrm{Im}\, f \leq \mathrm{Im}\, g$ vagy $\mathrm{Im}\, g \leq \mathrm{Im}\, f$, akkor igen!

3. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók $\mathbb{R}$ fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot! Melyik mátrix mátrixa egy altérre való vetítésnek?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!
a) Az $x + y + z = 0$ síkra való vetítés a z tengely irányában.
b) A $p(x) \mapsto (x-1)p'(x)$ transzformáció a $K[x]_{\leq 2}$ vektortéren.
c) A transzponálás a 2×2-es valós mátrixok terében.

5. Az alábbi valós mátrixok közül melyek diagonalizálhatók! Adjuk meg mindegyik mátrixnak a sajátértékeit és a sajátaltereik bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Melyek igazak egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra?
a) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek is.
b) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak is.
c) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak is.
d) Ha $a^2 = b$ és b sajátértéke A^2-nek, akkor a vagy $-a$ sajátértéke A-nak is.

7. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Írjuk fel a hozzájuk tartozó lineáris transzformációk mátrixát a sajátvektorokból álló bázisban! Diagonalizálás segítségével számítsuk ki a B mátrix n-edik hatványát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Határozzuk meg az A^2 és az A mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, azok algebrai és geometriai multiplicitását és a mátrixok karakterisztikus polinomját, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Házi feladatok

Beadási határidő: február 22.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel az origón átmenő, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ irányvektorú e egyenes mentén a $z = 0$ egyenletű S síkra vetítő leképezés, illetve az S sík mentén az e egyenesre való vetítés standard mátrixát! Mi a két leképezés kompozíciójának standard mátrixa?

2. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok között melyek hasonlók $\mathbb{R}$ fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg a következő lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!
a) Az $(1, 2, -3)$ irányvektorú, origón átmenő egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^3$-ben.
b) A két oszlop felcserélése a 2×2-es valós mátrixok terében.

4. Az alábbi mátrixok közül melyek diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött? Mindegyik mátrixra adjuk meg a sajátértékeket és azok algebrai és geometriai multiplicitását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$ komplex mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát!

6. Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeinek algebrai és geometriai multiplicitását! A két multiplicitás kapcsolatáról szóló tétel bizonyítását követve keressünk egy A-hoz hasonló $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda I_k & * \\ 0 & A' \end{bmatrix}$ blokkmátrixot (a konjugáló P mátrixszal együtt), ahol $\lambda = 1$, és k a λ geometriai multipliciása.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \times n$-es A, B mátrixokra AB-nek és BA-nak ugyanazok a sajátértékei, és a nemnulla sajátértékeiknek ugyanakkora a geometriai multiplicitása is, de a nullának nem feltétlenül.