

1. Mutassuk meg, hogy az $n \times n$ -es ortogonális mátrixok csoportot alkotnak, azaz ortogonális mátrixok szorzata ortogonális, inverze ortogonális és az egységmátrix ortogonális.
2. Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket!

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az A mátrix QR-felbontását, valamint teljes QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

4. a) Írjuk fel azt a 2×2 -es forgatásmátrixot, amely az $(1, 2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!
 b) Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés standard mátrixát!
 c) Írjuk fel annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, amely a $v = (1, -1, 1, -1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

5. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

6. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!

7. Tekintsük a 3. feladatbeli A mátrixot. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyetlen legjobban közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 1)$. Miért van csak egy legjobban közelítő megoldás?
8. Adjunk példát arra, hogy a Householder-tükrözéseket, illetve a Givens-forgatásokat használó módszer két különböző teljes QR-felbontásra vezethet. Speciálisan, ha $A \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, ahol $m > 1$, akkor a két felbontás biztosan különbözik.

Házi feladatok

Beadási határidő: március 8.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ olyan lineáris transzformáció, amely minden vektort c -szer olyan hosszú vektorba képez, akkor f standard mátrixa egy ortogonális mátrix skalárszorosa. (Útmutatás: lássuk be, hogy $g(\mathbf{x}) := \frac{1}{c}f(\mathbf{x})$ lineáris transzformáció, és használjuk g -re az ortogonális transzformációkat jellemző tételt.)
2. a) Írjuk fel azt a 2×2 -es forgatásmátrixot, amely a $(2, -1)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!
b) Adjuk meg azt a Householder-tükrözést, amely a $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla és az első koordináta pozitív.
3. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!
4. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását és teljes QR-felbontását Gram-Schmidt-féle ortogonalizációval!
5. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!
6. Tekintsük a 4. feladatbeli A mátrixot. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer legjobb közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (4, 0, 0, 0)$.
- 7*. Bizonyítsuk be, hogy ha A teljes oszloprangú, akkor van olyan $A = CR$ felbontása, ahol C oszlopai ortogonálisak (nem feltétlenül ortonormáltak!), és R olyan felső háromszögmátrix, amelynek a diagonális elemei mind 1-ek. Lássuk be, hogy ez a felbontás is egyértelmű!