1. Keressük meg azt a mátrixot, mely a definíció alapján igazolja, hogy az alábbi két mátrix kongruens, azaz olyan invertálható P mátrixot, amelyre $B = P^T AP$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

3. a) Bizonyítsuk be, hogy x^4+5x^3+x+6 nem lehet egy valós szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja.

b) Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -(x^3+2x^2-10x+6)$. A Descartes-féle előjelszabály segítségével állapítsuk meg a mátrix jellegét!

4. Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szemidefinit és egy pozitív definit mátrix összege mindig pozitív definit.

5. Tekintsük a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényt, ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!

b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

6. Határozzuk meg az alábbi A mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

7. Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve a $W = \mathrm{span}((1, 1, 0), (0, 2, 1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: március 29.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az alábbi szimmetrikus mátrixok jellegét:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Adjunk meg olyan bázist $\mathbb{R}^3$-ben, amelyre az előző feladat B mátrixához tartozó $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ kvadratikus alak mátrixa olyan diagonális mátrix, amelynek csak 0 és ± 1 elemei vannak!

3. Használjuk a Descartes-féle előjelszabályt az alábbi kérdések megválaszolásához!

a) Hány pozitív és hány negatív valós gyöke lehet az $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^2 + 5$ polinomnak a Descartes-féle előjelszabály szerint?

b) Hány pozitív és hány negatív sajátértéke van annak a valós szimmetrikus mátrixnak, amelynek karakterisztikus polinomja $k(x) = x^4 - 5x^2 + x + 1$?

4. Hozzuk diagonális alakra a $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3$ kvadratikus alakot, és határozzuk meg a jellegét! Adjunk meg egy bázist (nem feltétlenül ortogonálist), amelyben a kvadratikus alak diagonális alakú!

5. Adjuk meg az alábbi mátrix Cholesky-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$-ben az $(1, -1, 1)$ vektor által generált altér bal, illetve jobb oldali merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ bilineáris függvényre nézve, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7*. Melyek azok a $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ valós szimmetrikus bilineáris függvények, amelyekre bármely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor eleme egy φ-ortogonális bázisnak?