1. Legyen egy φ komplex skalárszorzat (azaz pozitív definit hermitikus bilin. fv.) Gram–mátrixa az $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \,\}$ standard bázisban $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$.

a) Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, \varphi)$ euklideszi térben.
b) Adjunk meg egy φ-ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben!
c) Adjuk meg φ Gram-mátrixát abban a $\mathcal{B}$ bázisban, amelynek elemei $\mathbf{b}_1 = (1, i)$ és $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.

2. Legyen $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$ az alábbi A mátrixszal.

a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ értékét $\mathbf{x} = (1, i, 0)$, $\mathbf{y} = (2 - i, 1, 1)$-re.
b) Adjuk meg a φ által definiált kvadratikus alakot.
c) Diagonalizáljuk az A mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk φ-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$-ben. Mi a kvadratikus alak jellege?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!

4. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det[\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$ bilineáris függvényt. Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban! Van-e $\mathbb{R}^2$-nek φ-ortogonális bázisa?

5. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

6. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális mátrix, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ szinguláris értékekkel. Lássuk be, hogy $B = A + cI$ is normális tetszőleges $c \in \mathbb{C}$-re, és a legnagyobb szinguláris értéke legföljebb $\sigma_1 + |c|$.

7. Lássuk be, hogy az alábbi A mátrix normális! Határozzuk meg az SVD-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -i \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: április 12.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i\bar{x}_1 y_2 - i\bar{x}_2 y_1$.
 a) Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban!
 b) Lássuk be, hogy φ hermitikus!
 c) Határozzuk meg a jellegét!

2. Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben az előző feladatbeli φ mátrixa diagonális! Írjuk fel a kvadratikus alakot ebben a bázisban!

3. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, és tekintsük a

$$\varphi(p, q) = p(a)q(b) + q(a)p(b)$$

bilineáris függvényt a legfeljebb elsőfokú valós polinomok terén. Írjuk fel a φ mátrixát a standard $\{\,1, x\,\}$ bázisban! Az a és b értékétől függően mi a jellege a φ-hez tartozó kvadratikus alaknak?

4. Állítsuk elő az alábbi A mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Az $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontása

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg A^{-1} SVD-felbontását (Figyeljünk a szinguláris értékek sorrendjére)!

6. Legyen φ valós szimmetrikus bilineáris függvény, és q a hozzá tartozó kvadratikus alak. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges két $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ φ-ortogonális bázisra

$$\operatorname{span}\{\, \mathbf{b}_i \in \mathcal{B} \mid q(\mathbf{b}_i) = 0 \,\} = \operatorname{span}\{\, \mathbf{c}_j \in \mathcal{C} \mid q(\mathbf{c}_j) = 0 \,\}.$$

(Útmutatás: Lássuk be, hogy mindkét altér $V_\varphi^\perp$-vel egyenlő!)

7*. Melyek azok a 2×2-es valós mátrixok, amelyek nem kongruensek felső Δ-mátrixszal?
A $++$, $--$, $+-$, $+0$, -0, 00 előjelkészletek közül melyek tartozhatnak $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben egymással kongruens felső Δ-mátrixok diagonális elemeihez?