

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált SVD-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel az 1. feladatbeli  $B$  és  $C$  mátrixok teljes SVD-felbontását és a  $C$  mátrix SVD-felbontásának diadikus alakját!
3. Számítsuk ki az 1.-beli  $B$  és  $C$  mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!
4. Számítsuk ki az 1. feladatbeli négyzetes mátrixok polárfelbontását! Melyiknek van többféle is?
5. Adjuk meg az 1.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?
6. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben, illetve  $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ -ben, amelynek az ötödik hatványa az egységmátrix?
8. Lássuk be, hogy a  $2 \times 2$ -es mátrixok között pontosan azok hasonlók, amelyeknek megegyezik a minimálpolinomjuk, de  $3 \times 3$ -as mátrixokra ez már nem igaz.
9. Hasonlóság erejéig hány olyan valós, illetve komplex  $2 \times 2$ -es mátrix van, amelynek a köbe az egységmátrix?

**Házi feladatok**

Beadási határidő: április 19.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

1. Adjuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!
2. Írjuk fel a  $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  mátrix redukált SVD-felbontását, és számítsuk ki ebből a pszeudoinverzét!
3. Határozzuk meg a  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  mátrix SVD-felbontását, és adjuk meg ennek segítségével a polárfelbontását!
4. Határozzuk meg 3. feladat  $C$  mátrixának és  $C^{-1}$ -nek is a legjobb 1 rangú közelítését!
5. Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. A Cayley–Hamilton-tétel bizonyításában felírtuk egy  $A$  mátrixra az  $\text{adj}(A - xI)$  mátrixot mint mátrixegyütthatós polinomot. Számítsuk ki ezt a polinomot (írjuk is fel mindegyik mátrixegyütthatót) az alábbi  $A$  mátrixra.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 7\*. Bizonyítsuk be, hogy minden  $\mathbb{Z}_2$  fölötti  $2 \times 2$ -es mátrix nyolcadik hatványa megegyezik a négyzetével.