

- Legyen A 10×10 -es valós mátrix! Jelölje r_i az A^i rangját! Lehet-e az (r_1, r_2, \dots) sorozat egyenlő az alábbiakkal?
 - $(5, 6, \dots)$;
 - $(9, 8, 7, \dots, 4, 4, \dots)$;
- Egy 10×10 -es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!
- Bizonyítsuk be, hogy ha $K \leq L$ végtelen testek, és $A, B \in K^{n \times n}$ hasonlók mint L fölötti mátrixok, akkor $K^{n \times n}$ -ben is hasonlók!
- Bizonyítsuk be, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához!
- Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Határozzuk meg az alábbi mátrix karakterisztikus és minimálpolinomját! Bontsuk fel a minimálpolinomot relatív prím faktorokra \mathbb{R} fölött, és hozzuk a mátrixot ennek a felbontásnak megfelelő blokkdiagonális alakra! Mi a mátrix \mathbb{C} fölötti Jordan-normálalakja?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Mutassuk meg, hogy szinguláris mátrixokra ez nem feltétlenül igaz! Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix valamelyik négyzetgyökét!
- Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3 -as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?

Házi feladatok

Beadási határidő: május 3.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen A 10×10 -es valós mátrix! Jelölje r_i az A^i rangját! Lehet-e az (r_1, r_2, \dots) sorozat egyenlő az alábbiakkal?
 - a) $(10, 9, 8, \dots)$;
 - b) $(8, 5, \dots)$.
2. Egy 10×10 -es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre 8, 7, 6, 6. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre 7, 5, 4, 4. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!
3. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3 -as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a negyedik hatványával?
5. Vonjunk négyzetgyököt a $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixból $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -ben! Létezik-e valós négyzetgyöke?
6. A 10/3. gyakorló feladatban beláttuk, hogy blokkdiagonális mátrix karakterisztikus polinomja a diag. blokkok karakt. polinomjának szorzata, minimálpolinomja, pedig a diag. blokkok minimálpolinomjának legkisebb közös többszöröse. Bizonyítsuk be, hogy a karakterisztikus polinomokra vonatkozó állítás blokkháromszögmátrixokra is igaz, de a minimálpolinomokra vonatkozó nem (az utóbbira adjunk ellenpéldát)!
- 7*. Van-e olyan 3×3 -as valós, 0 nyomú A mátrix, amelyre és $A^2 + A^T = I$?