

1. Bizonyítsuk be, hogy $U = \text{span}((1, 1, 0, 1), (0, -1, 2, 1))$ és $W = \text{span}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ alterek direkt kiegészítői egymásnak! Írjuk fel az U -ra való W irányú vetítés standard mátrixát!

Megoldás: Ahhoz, hogy $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, elég belátni, hogy a négy megadott vektor lineárisan független, mert akkor egyrészt $U \cap W = 0$, másrészt a 4-dimenziós \mathbb{R}^4 -ben 4 független vektor szükségképpen generátorrendszer, ezért $U + W = \mathbb{R}^4$ is teljesül:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

A vetítés az U bázisvektorait önmagukba, a W bázisvektorait pedig $\mathbf{0}$ -ba képezi, tehát a standard mátrix az $AP = P'$, azaz $P^T A^T = (P')^T$ mátrixegyenlet megoldása, ahol P' oszlopai a P első két oszlopa és két $\mathbf{0}$ oszlop.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(Érdemes ellenőrizni a mátrix hatását a négy bázisvektoron.)

2. Tegyük fel, hogy f és g is vetítések a V vektortéren. Lássuk be, hogy $g \circ f$ általában nem vetítés (adjunk ellenpéldát!), de ha $\text{Im } f \leq \text{Im } g$ vagy $\text{Im } g \leq \text{Im } f$, akkor igen!

Megoldás: Ha f az x tengelyre való merőleges vetítés, g pedig az $y = x$ egyenesre, akkor $[g \circ f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$, amelynek a négyzete nem önmaga, hanem $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$, tehát $g \circ f$ nem vetítés.

Legyen A az f , B a g mátrixa valamely \mathcal{B} bázisban. Ekkor $A^2 = A$, $B^2 = B$, és ha $\text{Im } f \leq \text{Im } g$, akkor $BA = A$, ugyanis A oszlopaikat B helyben hagyja, ha viszont $\text{Im } g \leq \text{Im } f$, akkor $AB = B$, ugyanis akkor B oszlopaikat hagyja helyben az A . Az első esetben $BABA = BAA = BA$, a másodikban $BABA = BBA = BA$, tehát mindkét esetben igaz, hogy $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^2 = (BA)^2 = BA = [g \circ f]_{\mathcal{B}}$, ezért $g \circ f$ vetítés.

3. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók \mathbb{R} fölött? A hasonlókra adjunk is meg egy átkonjugáló mátrixot! Melyik mátrix mátrixa egy altérre való vetítésnek?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Írjuk fel mindegyik mátrixra a nyomot, a rangot és a determinánst. Hasonló mátrixokra ezek mind megegyeznek, tehát ezután csak az olyan mátrixpárokkal kell foglalkoznunk, amelyekre ez a három szám azonos.

	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
nyom	1	3	0	2	2	3
rang	1	2	2	1	2	2
det	0	2	-2	0	1	2

Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokról kell még eldönteni, hogy hasonló-e, más hasonló pár nem lehet a 6 mátrix között. Olyan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertálható mátrixot keresünk, amelyre $P^{-1}AP = B$, azaz $AP = PB$, elemekkel leírva $\begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{bmatrix}$. Ez a, b, c, d -re lineáris egyenletrendszer, amelynek a megoldása $a = 0$, $d = c$, és b, c tetszőleges, vagyis az összes olyan $P = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & c \end{bmatrix}$ mátrix megfelel, amelynek a determinánsa $-bc \neq 0$, például $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezzel beláttuk, hogy A és B hasonló mátrixok.

Megjegyzés: Mivel A diagonális mátrix, az A és B hasonlóságát azzal is bizonyíthatjuk, hogy megkeressük B sajátértékeit (mivel háromszögmátrix, ezt számolás nélkül is megállapíthatjuk), és belátjuk, hogy B diagonalizálható, ami pedig rögtön következik abból, hogy a 2×2 -es B mátrixnak két különböző sajátértéke van.

Egy invertálható mátrix csak akkor lehet vetítés, ha az megegyezik az I egységmátrixszal, ugyanis a vetítés az oszloptéren (azaz a képtéren) identikusan hat. Tehát csak az első és a negyedik mátrix jön szóba. Az első négyzete önmaga, így az vetítés ($\text{span}(\mathbf{e}_1)$ -re a $\text{span}(\mathbf{e}_2)$ mentén), a negyedik négyzete viszont önmaga kétszerese, így az nem vetítés.

4. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!*
- Az $x + y + z = 0$ síkra való vetítés a z tengely irányában.
 - A $p(x) \mapsto (x - 1)p'(x)$ transzformáció a $K[x]_{\leq 2}$ vektortéren.
 - A transzponálás a 2×2 -es valós mátrixok terében.

Megoldás: a) A sík nemnulla vektorai a sajátvektorok $\lambda = 1$ sajátértékkel, a z tengellyel párhuzamos nemnulla vektorok pedig $\lambda = 0$ sajátértékkel. Több nem lehet, mert már ezek is kigenerálják a teljes \mathbb{R}^3 -at.

- b) 0 csak akkor lehet a kép, ha $p' = 0$, azaz, ha p konstans polinom, így a $\lambda = 0$ sajátértékhez a $c \neq 0$ konstans polinomok a sajátvektorok. Ha $\lambda \neq 0$ sajátérték, és $p(x)$ ehhez sajátvektor, akkor $(x - 1)p'(x)$ skalárszorosa $p(x)$ -nek, tehát $p(x) = (x - 1)h(x)$ alakú, képe pedig $(x - 1)p'(x) = (x - 1)((x - 1)h'(x) + h(x)) = (x - 1)^2h'(x) + (x - 1)h(x)$ skalárszorosa $p(x) = (x - 1)h(x)$ -nek, tehát $(x - 1)^2h'(x)$ is az. Legfőbb másodfokú polinomok között ez csak úgy történhet, hogy vagy $h'(x) = 0$, tehát $p(x) = c(x - 1)$ valamely $c \neq 0$ -ra, vagy $p(x) = c(x - 1)^2$ valamely $c \neq 0$ -ra. A sajátértékek a c , $c(x - 1)$ és $c(x - 1)^2$ polinomokhoz rendre 0, 1, 2.

Másképpen: Felírhatjuk a transzformáció (standard) mátrixát, és megkereshetjük ennek a sajátértékeit és sajátvektorait, majd megadjuk a sajátvektoroknak megfelelő

polinomokat.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 0, 1, 2, \text{ s.vektorok: } t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

így a sajátvektorok az eredeti $K[x]_{\leq 2}$ vektortérben az 1 , $x-1$ és x^2-2x+1 polinomok nemnulla konstansszorosai.

- c) A (nem 0) szimmetrikus mátrixok sajátvektorok 1 sajátértékkel, az antiszimmetrikusak pedig -1 sajátértékkel. A szimmetrikus mátrixok 3-dimenziós alteret alkotnak: az

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

egyértelmű lineáris kombináció mutatja, hogy $\{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}$ bázisa a sajátaltérnek. Az antiszimmetrikus mátrixok pedig egydimenziósak:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Így $\dim V_1 + \dim V_{-1} \geq 3 + 1 = 4$, és $\dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = 4$, tehát több sajátérték és sajátvektor nem is lehet.

Másképp: Felírhatjuk a transzformáció mátrixát is a standard $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ bázisban: $A(a, b, c, d)^T = (a, c, b, d)^T$, így a transzformáció mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek a karakt. polinomja $(x-1)^2(x^2-1) = (x-1)^3(x+1)$. A sajátaltér $\lambda = 1$ -re:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát az 1-hez tartozó sajátaltér bázisa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$\lambda = -1$ -re pedig

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

így a -1 -hez tartozó sajátaltér bázisa $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

5. Az alábbi valós mátrixok közül melyek diagonalizálhatók! Adjuk meg mindegyik mátrixnak a sajátértékeit és a sajátaltérük bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A karakterisztikus polinomja $|A - xI| = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, sajátértékei 3 és -1 . Két különböző sajátértéke van, ezért diagonalizálható, és diagonális alakja $\text{diag}(3, -1)$.

Sajátaltérük az $A - 3I$ és $A + I$ nullterei:

$$\lambda = 3: \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1: \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így V_3 bázisa $\{(-1, 1)\}$, V_{-1} bázisa $\{(1, 1)\}$.

B felső háromszögmátrix, ezért a sajátértékei a diagonális elemei, tehát csak 1. 1 algebrai multiplicitása 3, viszont $B - I$ rangja 1, ezért a sajátaltér dimenziója (azaz az 1 geometriai multiplicitása) csak 2, tehát a B mátrix nem diagonalizálható. A V_1 sajátaltér bázisa könnyen leolvashatóan $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$.

C is felső háromszögmátrix, így könnyen leolvashatók a sajátértékei: 1, 2, -1 . Mivel ezek mind különbözők, C diagonalizálható, és diagonális alakja $\text{diag}(1, 2, -1)$. A sajátaltérük:

$$\begin{aligned} \lambda = 1\text{-hez: } & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda = 2\text{-höz: } & \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda = -1\text{-hez: } & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/6 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{6}t \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tehát a három sajátaltér bázisa $\{(1, 0, 0)\}$, $\{(1, 1, 0)\}$ és $\{(7, -2, 6)\}$.

6. Melyek igazak egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra?

- Ha \mathbf{v} sajátvektora A -nak, akkor \mathbf{v} sajátvektora A^2 -nek is.
- Ha \mathbf{v} sajátvektora A^2 -nek, akkor \mathbf{v} sajátvektora A -nak is.
- Ha 0 sajátértéke A^2 -nek, akkor 0 sajátértéke A -nak is.
- Ha $a^2 = b$ és b sajátértéke A^2 -nek, akkor a vagy $-a$ sajátértéke A -nak is.

Megoldás: a) Igaz. Ha $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, akkor $A^2\mathbf{v} = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$.

b) Nem igaz. Például az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ négyzete az egységmátrix, amelynek minden nemnulla vektor sajátvektora, de A -nak nem. Például az $(1, 0)$ nem sajátvektora A -nak, de A^2 -nek igen.

c) Igaz. Ha A^2 -nek sajátértéke a 0, akkor $|A|^2 = |A^2| = 0$, ezért $|A| = 0$, amiből következik, hogy A -nak is sajátértéke a 0.

d) Igaz. $0 = |A^2 - a^2I| = |(A + aI)(A - aI)| = |A + aI| \cdot |A - aI| \Rightarrow |A + aI| = 0$ vagy $|A - aI| = 0$. (Itt használtuk, hogy I felcserélhető bármely mátrixszal, bár általában $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.)

7. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Írjuk fel a hozzájuk tartozó lineáris transzformációk mátrixát a sajátvektorokból álló bázisban! Diagonalizálás segítségével számítsuk ki a B mátrix n -edik hatványát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|A - xI| = x^2 - 2x \Rightarrow$ a sajátértékek 0 és 2. Két különböző sajátérték van, tehát A diagonalizálható. A sajátvektorok:

$$0: \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 2: \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t \neq 0$ -ra. Egy sajátbázis $\mathcal{B} = \{(-i, 1), (i, 1)\}$. Az ezekből a vektorokból mint oszlopokból álló P áttérési mátrixszal $P^{-1}AP = D = \text{diag}(0, 2)$.

B sajátértékei 1 és 2, sajátvektorai

$$1: \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 2: \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t \neq 0$ -ra. Egy sajátbázis $\mathcal{B} = \{(1, 0), (-1, 1)\}$. Az ezekből a vektorokból mint oszlopokból álló P áttérési mátrixszal $P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, 2) \Rightarrow A = PDP^{-1}$. Így

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

8. Határozzuk meg az A^2 és az A mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, azok algebrai és geometriai multiplicitását és a mátrixok karakterisztikus polinomját, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: A szimmetrikus mátrix, és az oszlopai egymásra merőleges, 2 hosszúságú vektorok, ezért $A^2 = 4I$. Ez utóbbinak 4 az egyetlen sajátértéke, és minden nemnulla vektor sajátvektora. Tehát 4 geometriai és algebrai multiplicitása egyaránt 4. A^2 karakterisztikus polinomja eszerint $(x - 4)^4$. Másrészt a 3.a) feladat megoldása szerint A sajátértékei csak ± 2 közül valók lehetnek. $A - 2I$ láthatóan egy rangú mátrix (az összes többi sor az első sor -1 -szerese), ezért a 2 az A 3-szoros geometriai és legalább 3-szoros algebrai multiplicitású sajátértéke. A hozzá tartozó sajátvektorok az $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ sík nemnulla vektorai. A -2 is sajátérték, a mátrixból is könnyen leolvasható, hogy $(-1, 1, 1, 1)$ egy -2 -höz tartozó sajátvektor, s mivel -2 algebrai multiplicitása már csak 1 lehet, ez a geometriai multiplicitása is, vagyis az összes, -2 -höz tartozó sajátvektor a $(-1, 1, 1, 1)$ vektor skalárszorosa. (Egyébként az, hogy -2 is sajátérték, abból is leolvasható, hogy A nyoma 4, és így az utolsó sajátérték $4 - 3 \cdot 2 = -2$.) Tehát 2 algebrai multiplicitása nem lehet 3-nál több (és így pontosan 3), és $k_A(x) = (x - 2)^3(x + 2)$.