1. *Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását és ennek segítségével a 12-edik hatványát!*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A spektrálfelbontást kiszámíthatjuk az $A = PDP^{-1}$ felbontás sajátértékek szerint csoportosított összegre bontásából, de a sajátvektorok megkeresése és P invertálása helyett a spektrálfelbontás vetítőmátrixait meghatározhatjuk az alábbi egyenletrendszerből is:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & + & \dots & + & P_k & = & I \\ \lambda_1 P_1 & + & \dots & + & \lambda_k P_k & = & A \\ \dots & & & & & & \\ \lambda_1^{k-1} P_1 & + & \dots & + & \lambda_k^{k-1} P_k & = & A^{k-1} \end{array}$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a diagonalizálható A mátrix sajátértékei. Esetünkben $|A - xI| = -(x+1)^2(x-2)$, és az egyenletrendszer

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & I \\ -1 & 2 & A \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & I \\ 0 & 3 & A+I \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}A \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I \end{array}\right] \qquad \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{1}{3}(2I - A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{3}(A + I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$A = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a spektrálfelbontás, és

$$A^{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 4096 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096 & 4095 & -4095 \\ 4095 & 4096 & -4095 \\ 4095 & 4095 & -4094 \end{bmatrix}$$

2. *Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi A mátrixnak van legalább két valós sajátértéke! (Használjuk a Gersgorin-köröket!)*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az oszlopokhoz tartozó Gersgorin-körök:

$$G_1: \ |z-2| \le 1, \quad G_2: \ |z-9| \le 1, \quad G_3: \ |z-2| \le 5, \quad G_4: \ |z-6| \le 1.$$

Itt $G_1 \cup G_3 \cup G_4 = G_3$ diszjunkt G_2-től, ezért a négy sajátértékből (multiplicitással számolva) az első hármat, a második egyet tartalmaz. Viszont valós együtthatós polinom (ilyen a valós mátrix karakterisztikus polinomja is) nemvalós gyökei konjugált párokat alkotnak, tehát az x tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el, ahogy a G_1, G_2, G_3, G_4 Gersgorin-körök is. Így a G_3-ba eső három sajátértékből legföljebb egy pár lehet az x tengelyen kívül, a G_2-ben levő pedig szükségképpen az x tengelyen van. Tehát A-nak van legalább két különböző valós sajátértéke. (Valójában pontosan kettő van.)

3. *Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!*

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1),\ \ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1),\ \ \mathbf{v}_3 = (1, 3, 1, -1)$$

Megoldás: Először csak ortogonalizálunk, aztán normálunk. Egy-egy ortogonalizálás után az új vektort helyettesíthetjük a skalárszorosával, ha az szebb.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1)$,
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{c}_1, \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{c}_1|^2}\mathbf{c}_1 = (1, -1, 0, 1) + \frac{2}{2}(0, 1, 0, -1) = (1, 0, 0, 0)$.
$\mathbf{c}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{c}_1, \mathbf{v}_3)}{|\mathbf{c}_1|^2}\mathbf{c}_1 - \frac{(\mathbf{c}_2, \mathbf{v}_3)}{|\mathbf{c}_2|^2}\mathbf{c}_2 = (1, 3, 1, -1) - \frac{4}{2}(0, 1, 0, -1) - \frac{1}{1}(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 1)$.
Tehát a $\{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \,\}$ vektorrendszernek megfelelő ortogonális rendszer $\{(0, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\,\}$, és a generált altér ortonormált bázisa ebből $\{\, \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1),\ (1, 0, 0, 0),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1)\,\}$.

4. *Tekintsük az $(1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0)$ által kifeszített W alteret a $V = \mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.*
a) Mutassuk meg, hogy $W^\perp$ nem direkt kiegészítője W-nek.
b) Válasszunk ki a $\mathbb{Z}_2^4$ standard $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ bázisából két elemet, amelyek W-nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!

Megoldás: a) Látható, hogy $(1, 1, 0, 0)$ merőleges W mindkét generátorelemére, tehát $W \cap W^\perp \neq 0$, így $W^\perp$ nem lehet direkt kiegészítője W-nek.
A W merőlegesét egyébként az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával számíthatjuk ki, ahol A sorai a W egy generátorrendszere (a megoldás vektoros alakjából a $W^\perp$ bázisát is leolvashatjuk). Ezután a $W + W^\perp$ dimenzióját ellenőrizhetjük egy másik Gauss-eliminációval, amit a két generátorrendszer uniójára alkalmazunk. Mivel $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, pontosan akkor lesz $V = W \oplus W^\perp$, ha $\dim(W + W^\perp) = \dim V$.

b) Végezzünk Gauss-eliminációt arra a mátrixra, amelynek első néhány oszlopa a W megadott generátorrendszere, a többi az, amiből a kiegészítést választhatjuk (ez lehet általában a teljes tér egy tetszőleges generátorrendszere). A lépcsős alak vezérelemei által megjelölt oszlopok a W bázisával kezdődnek, és ezt egészítik ki a többiek a V egy bázisává. Ne felejtsük el, hogy modulo 2 számolunk ebben a feladatban!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A vezéroszlopok az 1., 2., 3. és 5., tehát a direkt kiegészítő altér egy lehetséges bázisa $\{\, \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3 \,\}$.

5. *Tekintsük az $\mathbb{R}^2$-et mint euklideszi teret az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix által megadott $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A := \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalárszorzattal. Legyen $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$.*
a) Mi lesz az $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_A$ és $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$, skalárszorzatok értéke, és mi az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ hossza ebben az euklideszi térben?
b) Adjunk meg erre a skalárszorzatra nézve ortonormált bázist $\mathbb{R}^2$-ben!

Megoldás: Vegyük észre, hogy A pozitív definit, mert szimmetrikus, és $[x\,y] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4xy + 5y^2 = (x + 2y)^2 + y^2 > 0$ minden $(x, y) \neq \mathbf{0}$-ra. Tehát az A által definiált bilineáris függvény skalárszorzat, és $\mathbb{R}^2$ ezzel a skalárszorzattal euklideszi tér.

a) $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j$ az A mátrix ij indexű eleme. Tehát $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 2$, $\mathbf{e}_1$ hossza $\sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = 1$, $\mathbf{e}_2$ hossza pedig $\sqrt{5}$ ebben az euklideszi térben.
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v} = (3,7)(1,-1)^T = -4$.

b) Használjunk Gram–Schmidt-ortogonalizációt a $\langle\ ,\ \rangle_A$ skalárszorzatra nézve, az $\{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \,\}$ bázison.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{e}_2 \rangle}{\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \rangle} \mathbf{c}_1 = (0,1) - 2(1,0) = (-2,1)$. Tehát $\{\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \,\} = \{(1,0), (-2,1)\,\}$ ortogonális bázis, és $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 \rangle = 1$, $\langle \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2 \rangle = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$, így ez egyúttal ortonormált bázis is.

6. *Legyen* $\mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,-1,-1,1)$.

a) Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ *ortogonális bázis az* $\mathbb{R}^4$ *standard euklideszi térben!*

b) Hogyan kapható meg egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ *vektornak az erre a bázisra vonatkozó koordinátavektora?*

c) Legyen $W = \operatorname{span}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ *altér. Számítsuk ki az* $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ *vektor* W*-re való merőleges vetületét!*

Megoldás: a) Ellenőrizhetjük külön-külön a merőlegességet, vagy mátrixosan azt, hogy az $\mathbf{a}_i$-kből mint oszlopokból álló A mátrixra $A^T A$ diagonális:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathbf{x}$ erre a bázisra vonatkozó koordinátavektorának i. komponense $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \,/\, \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle$.

c) $\mathbf{x}$ vetülete $\mathbf{x}' = -\frac{2}{4}\mathbf{a}_2 - \frac{4}{4}\mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_4 = -\frac{1}{2}(1,-1,1,-1) - (1,1,-1,-1) + 0 = \frac{1}{2}(-3,-1,1,3)$. (Ellenőrizhetjük azzal, hogy $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \frac{1}{2}(5,5,5,5)$ merőleges az altér minden generátorelemére.)