1. *Keressük meg azt a mátrixot, mely a definíció alapján igazolja, hogy az alábbi két mátrix kongruens, azaz olyan invertálható P mátrixot, amelyre $B = P^T AP$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: A mátrix sajátértékei ± 3 és 0, így könnyen lehet ortogonálisan diagonalizálni (a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek). Továbbá ebből tudhatjuk azt is, hogy a mátrix valóban kongruens a $D_0 = \operatorname{diag}(1, 0, -1)$ mátrixszal. A $3, 0, -3$ sajátértékekhez a sajátvektorok rendre $(2, 2, 1)$, $(-2, 1, 2)$ és $(1, -2, 2)$. Tehát

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

invertálható mátrixszal $A = P^T D_0 P$.

De szimultán sor-oszlopműveletekkel is diagonalizálhatunk (a Sylvester-tétel szerint abban a diag. alakban is egy pozitív, egy 0 és egy negatív diag. elem lesz valamilyen sorrendben), és aztán azt módosítjuk, hogy a D_0 mátrixot kapjuk.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{o}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixra $P^T AP = \operatorname{diag}(1, -4, 0)$. Ezt megkaphatjuk a $\operatorname{diag}(1, 0, -4)$ mátrixból a második és harmadik báziselemet megcserélő S permutációmátrixszal való konjugálással (mivel minden permutációmátrix ortogonális ez hasonlóság és kongruencia is egyúttal), majd azt szétbontjuk $D_1 D_0 D_1 = \operatorname{diag}(1, 1, 2)\operatorname{diag}(1, 0, -1)\operatorname{diag}(1, 1, 2)$-re. Tehát $P^T AP = S^T \operatorname{diag}(1, 0, -4)S = S^T D_1 D_0 D_1 S$, és így a

$$P' = PS^{-1}D_1^{-1} = PS^T D_1^{-1} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal $(P')^T AP' = D_0$.

2. *Milyen feltétel mellett lesz az alábbi valós mátrix pozitív, illetve negatív definit? Milyen jellege lehet még a mátrixnak más a értékekre?*

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Megoldás: A főminorjai rendre a, $a^2 - 4$, $a(a^2 - 4)$. Ezek akkor mind pozitívak, ha $a > 2$, tehát ekkor lesz A pozitív definit, és akkor $-, +, -$ előjelűek, ha $a < -2$, tehát A pontosan ekkor negatív

definit. Ahhoz, hogy valamilyen szemidefinit, de ne definit legyen, az A mátrixnak szingulárisnak kell lennie, azaz $|A| = (a^2-4)a = 0$, és ez csak $a = 0, 2, -2$ esetén teljesül. Könnyen látható, hogy $a = 0$ esetén a mátrix indefinit: a $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ bal fölső sarokmátrix sajátértékei ± 2, tehát az indefinit, és így A is. Ha $a = 2$, akkor szimultán sor-oszlopműveletekkel $A \cong \operatorname{diag}(2,0,2)$, ha pedig $a = -2$, akkor $A \cong \operatorname{diag}(-2,0,-2)$.
Összefoglalva: A negatív definit, ha $a < -2$, negatív szemidefinit (de nem definit), ha $a = -2$, pozitív szemidefinit (de nem definit), ha $a = 2$, pozitív definit, ha $a > 2$, és a maradék esetekben, tehát $-2 < a < 2$ esetén, indefinit.

3. *a) Bizonyítsuk be, hogy $x^4 + 5x^3 + x + 6$ nem lehet egy valós szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja.*
b) Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(x) = -(x^3 + 2x^2 - 10x + 6)$. A Descartes-féle előjelszabály segítségével állapítsuk meg a mátrix jellegét!

Megoldás: a) Az $f(x) = x^4 + 5x^3 + x + 6$ polinomnak nyilván nem lehet pozitív gyöke, ehhez még a Descartes-féle előjelszabály sem kell. Az $f(-x) = x^4 - 5x^3 - x + 6$ polinom együtthatóin két előjelváltás van, ezért f-nek legföljebb két valós negatív gyöke lehet (multiplicitással számolva). Ebből következik, hogy f-nek nem minden gyöke valós, tehát nem lehet egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja

b) A polinom együtthatói kétszer váltanak előjelet. Mivel tudjuk, hogy minden gyöke valós, ebből következik, hogy a pozitív gyökök száma pontosan 2, így van negatív gyöke is, tehát a mátrix indefinit.

4. *Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív szemidefinit és egy pozitív definit mátrix összege mindig pozitív definit.*

Megoldás: Ha P pozitív definit, S pedig pozitív szemidefinit, akkor minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{x}^T(P+S)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T S\mathbf{x} > 0$, ugyanis az első tag pozitív, a második nemnegatív.

5. *Tekintsük a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényt, ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$*
a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!
b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

Megoldás:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{sor}{\mapsto} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \overset{oszlop}{\mapsto} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] = [D \mid P^T] \Rightarrow$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a kvadratikus alak indefinit, az új bázis $\mathcal{B} = \{(1,0),\ (-\frac{5}{2}, 1)\}$. A kvadratikus alak a standard bázisban $x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2$, a $\mathcal{B}$-ben felírt négyzetösszeg alakja pedig $(x_1')^2 - \frac{9}{4}(x_2')^2$, ahol $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

6. *Határozzuk meg az alábbi A mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -x^3 + 18x^2 - 81x = -x(x-9)^2$, így a sajátértékei $9, 9, 0$. A 0-hoz tartozó egységnyi sajátvektor $\frac{1}{3}(2,-2,1)$. V_9 ennek a merőleges kiegészítője, annak egy lehetséges ortonormált bázisa $\{\frac{1}{3}(2,1,-2), \frac{1}{3}(1,2,2)\}$. Tehát a

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ortogonális mátrixszal $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0,9,9) = D$, azaz $A = PDP^{-1}$, és ebből A egy négyzetgyöke $P\sqrt{D}P^{-1} = P\sqrt{D}P^T =$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix},$$

amely szintén pozitív szemidefinit, mert egy pozitív szemidefinit diagonális mátrix ortogonálissal való konjugáltja.
Egy alternatív megoldás az, ha a spektrálfelbontásból (amelynek vetítő mátrixai szimmetrikus mátrix esetén maguk is szimmetrikusak) számítjuk ki a négyzetgyököt. Látható, hogy A diagonalizálható, mert $r(A - 9I) = 1 \Rightarrow \dim V_9 = 2$.
A felbontást meghatározó egyenletek: $P_1 + P_2 = I$, $9P_1 + 0P_2 = A$, így $P_1 = \frac{1}{9}A$, az A felbontása $A = 9(\frac{1}{9}A) + 0P_2 \Rightarrow$ a pozitív szemidefinit négyzetgyök $B = 3(\frac{1}{9}A) + 0P_2 = \frac{1}{3}A$.

7. *Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve a $W = \mathrm{span}((1,1,0),(0,2,1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Legyen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a W báziselemeiből mint oszlopokból álló mátrix. Ekkor
$W^\perp = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid B^T A\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} = \mathcal{N}(B^T A)$.

$$B^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $W^\perp = \mathrm{span}((-2,-1,1))$,
és ${}^\perp W = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T AB = \mathbf{0}^T \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid (AB)^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} = \mathcal{N}((AB)^T)$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tehát ${}^\perp W = \mathrm{span}((4,1,-2))$.