1. *Legyen egy φ komplex skalárszorzat (azaz pozitív definit hermitikus bilin. fv.) Gram–mátrixa az $\mathcal{E} = \{\,\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\,\}$ standard bázisban* $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$.

a) Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, \varphi)$ euklideszi térben.
b) Adjunk meg egy φ-ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben!
c) Adjuk meg φ Gram-mátrixát abban a $\mathcal{B}$ bázisban, amelynek elemei $\mathbf{b}_1 = (1, i)$ és $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.

Megoldás: a) A standard bázis elemeinek skalárszorzatát egyszerűen leolvashatjuk a Gram-mátrixból: $\mathbf{e}_i^* A \mathbf{e}_j = a_{ij}$. Tehát $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{2}$, és $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = i$.

b) A φ-ortogonalizáláshoz a második bázisvektort kell ortogonalizálni az elsőre.

$$\mathbf{c}_2' := \mathbf{e}_2 - \frac{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = (0,1) - \frac{i}{2}(1,0) = \left(-\frac{i}{2}, 1\right) \Rightarrow \mathbf{c}_2 = (-i, 2).$$

Tehát $\{\,\mathbf{e}_1, \mathbf{c}_2\,\}$ φ-ortogonális vektorrendszer, és $\mathbf{e}_1$ φ-normája $\sqrt{2}$, míg

$$\varphi(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2) = \begin{bmatrix} i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} = 6,$$

ezért $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-i,2) \right\}$ φ-ortonormált bázis.

c) Az új bázisra való áttérés P mátrixa és az új bázisbeli Gram-mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \qquad [f]_{\mathcal{B}} = P^*[f]_{\mathcal{E}}P = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}.$$

2. *Legyen $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A \mathbf{y}$ az alábbi A mátrixszal.*

a) Számítsuk ki a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ értékét $\mathbf{x} = (1, i, 0)$, $\mathbf{y} = (2 - i, 1, 1)$-re.
b) Adjuk meg a φ által definiált kvadratikus alakot.
c) Diagonalizáljuk az A mátrixot mint Gram-mátrixot, és adjunk φ-ortogonális bázist $\mathbb{C}^3$-ben. Mi a kvadratikus alak jellege?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* A \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - i$$

b) $q(\mathbf{x}) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + i\bar{x}_1 x_2 - i\bar{x}_2 x_1 + (1+i)\bar{x}_1 x_3 + (1-i)\bar{x}_3 x_1 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_3 x_2$

c) Szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizáljunk, egyúttal az egységmátrixra is alkalmazva a sorműveleteket, így az utóbbiból kapott mátrix adjungáltjának oszlopai (azaz a mátrix sorainak konjugáltjai) adják a diagonális alakhoz tartozó bázist. Arra kell figyelni, hogy ha a sorművelet $s_i \mapsto s_i + cs_j$, akkor az oszlopművelet $o_i \mapsto o_i + \bar{c}o_j$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1-i & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto[s_3-(1-i)s_1]{s_2+is_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & -1+i & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto[o_3-(1+i)o_1]{o_2-io_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & -1+i & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto{s_3+is_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+i & i & 1 \end{array}\right] \xmapsto{o_3-io_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+i & i & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{A diagonális alak: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és a hozzá tartozó bázis $\{(1,0,0),\ (-i,1,0),\ (-2-i,-i,1)\,\}$. A kvadratikus alak pozitív szemidefinit.

3. *Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!*

Megoldás: Ha a φ bilineáris függvény indefinit, akkor van olyan φ-ortogonális bázis, amelynek elemein a φ-hez tartozó kvadratikus alak pozitív és negatív értéket is fölvesz. Legyen $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ ez a két báziselem. Ekkor $\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) = s^2$, $\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) = -t^2$, és $\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c}) = \varphi(\mathbf{c},\mathbf{b}) = 0$, ahol s, t nemnulla valós számok. Az $\mathbf{u} = t\mathbf{b} + s\mathbf{c}$ vektor nem nulla, mert különben $\mathbf{c} = -\frac{t}{s}\mathbf{b}$-re $\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) = \frac{t^2}{s^2}\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) > 0$ lenne, és $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{u}) = t^2\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) + s^2\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) - st\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c}) - st\varphi(\mathbf{c},\mathbf{b}) = t^2s^2 - s^2t^2 = 0$.

4. *Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \det[\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$ bilineáris függvényt. Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban! Van-e $\mathbb{R}^2$-nek φ-ortogonális bázisa?*

Megoldás:
$\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
Tehát a Gram-mátrix a standard bázisban $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Nincs φ-ortogonális bázis, mert ha lenne, akkor A kongruens lenne egy diagonális, így szimmetrikus mátrixszal, tehát A maga is szimmetrikus lenne.

5. *Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását!*

Megoldás: $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $k_{A^*A} = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$.
$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
A^*A-hoz ortonormált sajátbázis a sajátértékek $3, 1$ sorrendjében: $\{\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\,\}$.
$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $U_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (AV_1 első oszlopát $\sigma_1 = \sqrt{3}$-mal, a másodikat $\sigma_2 = 1$-gyel osztottuk le.)
Redukált felbontás: $A = U_1\Sigma_1V_1^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ A teljes felbontáshoz csak U_1-et kell kiegészíteni unitérré (ortogonálissá), és Σ_1-et nullákkal 3×2-essé, mert V_1 maga is unitér. U_1-ben harmadik oszlopnak jó lesz az első kettő vektoriális szorzata, így a teljes felbontás:
$A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális mátrix, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ szinguláris értékekkel. Lássuk be, hogy $B = A + cI$ is normális tetszőleges $c \in \mathbb{C}$-re, és a legnagyobb szinguláris értéke legföljebb $\sigma_1 + |c|$.*

Megoldás: Egy mátrix pontosan akkor normális, ha unitérrel diagonális alakba konjugálható: $U^{-1}AU = D$. De ekkor $U^{-1}(A + cI)U = U^{-1}AU + U^{-1}cIU = D + cI$ szintén diagonális, tehát $A + cI$ is normális mátrix.
Feltehető, hogy D átlójában a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékek az abszolút értékek csökkenő sorrenjében következnek. Az A normalitása miatt a szinguláris értékek ekkor $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_r|$, és $\sigma_1 = |\lambda_1|$. $A + cI$ diagonális alakjának átlós elemei $\lambda_1 + c, \dots, \lambda_n + c$, s mivel $A + cI$ is normális, a legnagyobb szinguláris értéke a spektrálsugara. Viszont $|\lambda_i + c| \le |\lambda_i| + |c| \le \sigma_1 + |c|$, tehát ez legföljebb $\sigma_1 + |c|$.

7. *Lássuk be, hogy az alábbi A mátrix normális! Határozzuk meg az SVD-felbontását!*

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -i \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

Megoldás: $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + (1+2i)I$, ahol az első mátrix önadjungált (mellesleg unitér is), ezért normális, tehát a 6. feladat szerint A is normális.

$A^*A = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ i & 1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i & -i \\ i & 1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2i \\ 2i & 6 \end{bmatrix}$, kar. pol.-ja $x^2-12x+32=(x-8)(x-4)$,

$\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$, $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AV_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & -2 \\ 2+2i & 2i \end{bmatrix}$

$U_1 = \begin{bmatrix} (1-i)/2 & -1/\sqrt{2} \\ (1+i)/2 & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} (1-i)/2 & -1/\sqrt{2} \\ (1+i)/2 & i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ a redukált és a teljes felbontás is.