

1. Van-e az A mátrixnak 1-dimenziós, illetve 2-dimenziós invariáns altere \mathbb{R}^4 -ben?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Ha $U = \text{span}(\mathbf{u})$ egydimenziós invariáns alter, akkor $A\mathbf{u} \in \text{span}(\mathbf{u})$, azaz $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ -re (és fordítva, minden sajátvektor invariáns alteret generál). Viszont A karakterisztikus polinomja

$$k_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-x & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2-x & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1-x & -1 & 2 \\ 3 & -2-x & 2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 4 & 3 & -2-x \end{vmatrix} =$$

$-(-2-6+4+2x+2-2x) - x(-x^3+3x-2-4-3+4-4x+2+x+3-3x) = 2-x(-x^3-3x) = x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2)$, tehát A -nak nincs valós sajátértéke, így nincs egydimenziós invariáns altere \mathbb{R}^4 -ben.

Mivel $k_A(x)$ minden \mathbb{C} -beli gyöke egyszeres, A -nak mint komplex mátrixnak a minimálpolinomja is $(x^2+1)(x^2+2)$. De akkor az $\mathbb{R}[x]$ -beli minimálpolinomja sem lehet kisebb fokú. Ez azt jelenti, hogy $k_A(A) = (A^2+I)(A^2+2I) = O$, viszont A^2+2I nem nulla, ezért A^2+I nem lehet invertálható. Keressük meg A^2+I magját!

$$A^2 + I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $\text{Ker}(A^2+I)$ a 2-dimenziós $\text{span}((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ alter, és tudjuk, hogy A tetszőleges polinomjának magtere, tehát ez is, A -invariáns.

Másképp: keressünk egy sajátvektort \mathbb{C}^4 -ben! A sajátértékek $\pm i, \pm 2i$.

$$A - iI = \begin{bmatrix} 1-i & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-i & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2-i & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 1-i & -1 & 2+i \\ 0 & 3 & -2-i & 2+4i \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1-i & -1+i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy sajátvektor $\mathbf{v} = (i, -i, 1, 1)$, tehát $A\mathbf{v} = i\mathbf{v}$, így $A \text{Re } \mathbf{v} + iA \text{Im } \mathbf{v} = A\mathbf{v} = i(\text{Re } \mathbf{v} + i \text{Im } \mathbf{v}) = -\text{Im } \mathbf{v} + i \text{Re } \mathbf{v}$, s mivel A valós mátrix, ebből $A \text{Re } \mathbf{v} = -\text{Im } \mathbf{v}$ és $A \text{Im } \mathbf{v} = \text{Re } \mathbf{v}$ következik, tehát $U = \text{span}(\text{Re } \mathbf{v}, \text{Im } \mathbf{v}) = \text{span}((0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 0))$ kétdimenziós invariáns alter.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in K^{n \times n}$ -re $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B -invariáns.

Megoldás: Legyen $V_\lambda \leq K^n$ az A λ -hoz tartozó sajátaltere. Ha $\mathbf{v} \in V_\lambda$, akkor $A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v} = (BA)\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B\lambda\mathbf{v} = \lambda(B\mathbf{v})$, tehát $B\mathbf{v} \in V_\lambda$.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy $A = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ blokkdiagonális mátrix karakterisztikus polinomja a B_i mátrixok karakterisztikus polinomjának szorzata, minimálpolinomja pedig a B_i mátrixok minimálpolinomjának legkisebb közös többszöröse.

Megoldás: $k_A(x) = |A - xI| = |\text{diag}(B_1 - xI, \dots, B_k - xI)| = |B_1 - xI| \cdots |B_k - xI| = k_{B_1}(x) \cdots k_{B_k}(x)$.

Tetszőleges $f(x) \in K[x]$ polinomra $f(A) = \text{diag}(f(B_1), \dots, f(B_k))$, így $f(A) = O \Leftrightarrow f(B_i) = O \forall i \Leftrightarrow m_{B_i}(x) \mid f(x) \forall i \Leftrightarrow [m_{B_1}(x), \dots, m_{B_k}(x)] \mid f(x)$, tehát A minimálpolinomja $m_A(x) = [m_{B_1}(x), \dots, m_{B_k}(x)]$.

4. Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek a
- karakterisztikus polinomja $(x - 1)^6$, minimálpolinomja $(x - 1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;
 - karakterisztikus polinomja $-(x - \lambda)^7$, minimálpolinomja $(x - \lambda)^3$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

Megoldás: a) 6×6 -os mátrix, amelynek csak 1 a sajátértéke, és a Jordan-normálalakjában a legnagyobb blokk 4×4 -es, és összesen két Jordan-blokkja van, tehát a Jordan-normálalak egy 4×4 -es és egy 2×2 -es 1-blokkot tartalmaz.

- b) Ez egy 7×7 -es mátrix, amelynek egyetlen sajátértéke a λ , legnagyobb Jordan-blokkja 3×3 -as, és összesen három Jordan-blokkja van. 7-nek két ilyen felbontása is van: $7 = 3 + 3 + 1$ vagy $7 = 3 + 2 + 2$, tehát kétféle Jordan-alak is lehetséges:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

5. Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az első mátrix diagonalizálható (már csak azért is, mert valós szimmetrikus). Mivel minden sorösszege 5, a mátrixnak sajátértéke az 5 az $(1, 1, 1, 1, 1)$ sajátvektorral. A mátrix rangja 1, ezért a 0 is sajátértéke 4-dimenziós sajátaltérrel. Így a mátrix diagonális (és akkor Jordan-féle alakja $\text{diag}(5, 0, 0, 0, 0)$).

A második mátrix sajátértékei 2 és -5 , és a 2-höz tartozó sajátaltér csak 1-dimenziós, tehát a mátrix nem diagonalizálható, és így a Jordan-alakja

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

A harmadik mátrix egyetlen sajátértéke a 2, és $\dim V_2 = 1$, ezért a Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A negyedik mátrix ortogonális, tehát diagonalizálható. A karakterisztikus polinomja $-(x^3 - 1)$, ezért a sajátértékei $1, \varepsilon, \varepsilon^2$, ahol $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. A Jordan-normálalakja $\text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$.

6. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek
- karakterisztikus polinomja $-(x - 1)^3(x - 3)^4$;
 - minimálpolinomja $(x + 2)^6$, és sajátaltére 2-dimenziós?

Megoldás: a) A Jordan-normálalakban az 1-blokkok méretének megoszlása lehet $3, 2 + 1$ vagy $1 + 1 + 1$, a 3-blokkoké $4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1$ vagy $1 + 1 + 1 + 1$. Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.

- b) A minimálpolinomból következik, hogy a mátrix egyetlen sajátértéke -2 , és a legnagyobb Jordan-blokkja 6×6 -os. A sajátaltér dimenziója miatt pedig csak két Jordan-blokk lehet, így a kisebbiknek a mérete $1, 2, 3, 4, 5$ vagy 6 lehet, ez összesen 6 lehetőség.

7. Mutassuk meg, hogy ha két 3×3 -as vagy 2×2 -es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.

Megoldás: A karakterisztikus polinomban minden $(x - \lambda)$ gyöktényező kitevője legfeljebb $a = 3$, a minimálpolinomban ezért csak 1 , $a - 1$ vagy a lehet. A Jordan-normálalakban az első esetben minden λ -blokk 1×1 -es, a másodikban van egy $(a - 1) \times (a - 1)$ -es λ -blokk, és akkor azon kívül már csak egy 1×1 -es lehet, a harmadikban pedig egyetlen $a \times a$ -as λ -blokk van. Tehát ilyen méretű mátrixokra a karakterisztikus polinom és a minimálpolinom meghatározza a Jordan-normálalakot, így ezek között az azonos karakterisztikus és minimálpolinommal rendelkező mátrixok Jordan-normálalakja megegyezik, vagyis az ilyen mátrixok hasonlóak egymáshoz.

(4×4 -esre ez már nem igaz: például ha $k_A(x) = (x - 1)^4$ és $m_A(x) = (x - 1)^2$ igaz a $2 + 2$ -es és a $2 + 1 + 1$ -es felbontású, 1 sajátértékhez tartozó Jordan-mátrixra is.

8. Mi lehet az A^2 mátrix minimálpolinomja, ha $A \in M_n[\mathbb{C}]$ minimálpolinomja $(x + 1)^2$?

Megoldás: Ha $(A + I)^2 = O$, akkor $(A + I)^2(A - I)^2 = (A^2 - I)^2 = O$, így A^2 minimálpolinomja osztója az $(x - 1)^2$ polinomnak. Viszont $x - 1$ nem lehet, mert ha $A^2 - I = O$ lenne, akkor A minimálpolinomja osztója lenne $(x^2 - 1)$ -nek. Tehát A^2 minimálpolinomja $(x - 1)^2$.

Másképp: A Jordan-alakjában, $\mathcal{J}(A)$ -ban csak 2×2 -es és 1×1 -es -1 -blokkok vannak (és van legalább egy 2×2 -es). $\mathcal{J}(A)^2$ diagonális blokkjai $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $[1]$ alakúak, tehát 1 az egyetlen sajátértéke, és $(\mathcal{J}(A)^2 - I)$ -nek a négyzete O , de maga nem, tehát $\mathcal{J}(A)^2$ -nek és így a hozzá hasonló A^2 -nek is a minimálpolinomja $(x - 1)^2$.