1. *Legyen A 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az A^i rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?*

a) $(5, 6, \dots)$;

b) $(9, 8, 7, \dots, 4, 4, \dots)$;

Megoldás: a) Ez a rangsorozat nem lehetséges, mert $\operatorname{Im} A^{k+1} \leq \operatorname{Im} A^k$ minden k-ra, tehát a rangoknak is csökkenniük kellene, itt viszont az 5 után 6 következik.

b) Ilyen rangsorozatot kaphatunk, ha egy olyan Jordan-mátrixot veszünk, amelynek egyetlen 0-blokkja van, így ennek a hatványozásánál mindig 1-gyel csökken a rang, amíg 0-vá nem válik a blokk. Ez a rangsorozat szerint akkor következik be, amikor a rang 4, ezért a 0-blokk 6×6-os. Ezt a 0-blokkot kiegészíthetjük tetszőleges invertálható diagonális blokkal, például egy 4×4-es egységmátrixszal.

2. *Egy 10×10-es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre $8, 6, 5, 4, 4$. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre $7, 6, 6$. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!*

Megoldás: Írjuk fel egy táblázatba a rangok sorozatát (a nulladik hatvánnyal, tehát az egységmátrixszal kezdve). Ekkor a második differenciasorozat adja meg az adott sajátértékhez tartozó adott méretű Jordan-blokkok számát.

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
\hline
r((A-I)^k & 10 & & 8 & & 6 & & 5 & & 4 & & 4 \\
d_k & & 2 & & 2 & & 1 & & 1 & & 0 & \\
n_k & & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\
\hline
r((A-2I)^k & 10 & & 7 & & 6 & & 6 \\
d_k & & 3 & & 1 & & 0 & \\
n_k & & & 2 & & 1 & &
\end{array}$$

Tehát a Jordan-alakban egy 4×4-es és egy 2×2-es 1-blokk, és egy 2×2-es és két 1×1-es 2-blokk van. Azaz $\mathcal{J}(A) = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$, ahol

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_4 = [\,2\,], \quad J_5 = [\,2\,]$$

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha $K \leq L$ végtelen testek, és $A, B \in K^{n \times n}$ hasonlók mint L fölötti mátrixok, akkor $K^{n \times n}$-ben is hasonlók!*

Megoldás: A és B akkor hasonlók, ha van olyan P invertálható mátrix, amelyre $P^{-1}AP = B$, azaz $AP = PB$. Ez a P n^2 darab ismeretlen elemére egy lineáris egyenletrendszer, amelynek általános megoldása valahány K-beli vektor (valójában mátrix) paraméter-együtthatós lineáris kombinációja. A feltétel, hogy P invertálható, azt jelenti, hogy $|P| \neq 0$, és P determinánsa a paramétereknek K fölötti többváltozós polinomja. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha ennek a polinomnak van olyan L-beli behelyettesítési értéke, ami nem 0, akkor a paraméterekbe alkalmas K-beli elemeket is be tudunk helyettesíteni úgy, hogy az értéke ne legyen 0.

Legyen $f(x_1, \dots, x_k) \in K[x]$, és tegyük fel, hogy valamely $a_1, \dots, a_k \in L$ elemekre $f(a_1, \dots, a_k) \neq 0$. A változók számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ekkor van olyan $b_1, \dots, b_k \in K$, hogy $f(b_1, \dots, b_k) \neq 0$. $n = 1$-re igaz: egy m fokú egyváltozós nemnulla polinomnak legföljebb m gyöke lehet, és K végtelen. Tegyük fel, hogy $(k-1)$-változós polinomra igaz az állítás. f-et felírhatjuk x_k-nak $K[x_1, \dots, x_{k-1}]$ fölötti polinomjaként, amelynek nem minden együthatója azonosan nulla L fölött, mert akkor L fölött sem lenne nemnulla behelyettesítés. Tehát valamelyik együtthatónak az indukciós feltevés szerint van $(b_1, \dots, b_{k-1})$-gyel való K-beli nemnulla értékű behelyettesítése. Tekintsük a $g(x_k) = f(b_1, \dots, b_{k-1}, x_k)$ egyváltozós polinomot. Mivel ez nem az azonosan nulla polinom, csak véges sok gyöke lehet K fölött is, és így van olyan $b_k \in K$, amelyre $f(b_1, \dots, b_k) = g(b_k) \neq 0$.

Megj.: Véges testekre is igaz az állítás, csak ez a bizonyítás arra az esetre nem működik.

4. *Bizonyítsuk be, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához!*

Megoldás: Legyen $A \in K^{n\times n}$, és $L \geq K$ egy bővebb test, amelyben $k_A(x)$ lineáris faktorokra bontható. Ekkor L-ben van A-nak Jordan-normálalakja. Az előző feladat szerint elég belátni, hogy $A \sim A^T$ az L fölött. Legyen $A \sim J = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_k)$ az A Jordan-normálalakja a $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot\sqcup \dots \dot\sqcup \mathcal{B}_k$ bázisra való áttéréssel. Legyen $\mathcal{B}'_i$ a $\mathcal{B}_i$ fordított sorrendben. Ekkor az A mátrix a $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \dot\sqcup \dots \dot\sqcup \mathcal{B}'_k$ bázisban J^T, tehát $J^T \sim J$. Legyen $A = PJP^{-1}$ és $J^T = QJQ^{-1}$. Ekkor
$A^T = (P^{-1})^T J^T P^T = (P^{-1})^T QJQ^{-1}P^T = (Q^{-1}P^T)^{-1} J (Q^{-1}P^T) \sim J \sim A.$

5. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = (x-2)^2(x-1)^2$.
$r(A-2I) = 3 \Rightarrow \dim V_2 = 4-3 = 1 \Rightarrow \mathcal{J}(A)$-ban egy 2-blokk van, és így ez 2×2-es.
$r(A-I) = 2 \Rightarrow \dim V_1 = 4-2 = 2 \Rightarrow \mathcal{J}(A)$-ban két 1-blokk van, és így ezek 1×1-esek. Tehát

$$\mathcal{J}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda = 2$-höz egyetlen 2 hosszúságú Jordan-láncot kell keresnünk, mert egyetlen 2×2-es Jordan-blokk van. Először $(A-\lambda I)^i$ magterének, K_i-nek a bázisát kell megtalálnunk (most $i = 1, 2$-re). Aztán az i csökkenő rendjében (az alábbiakban jobbról balra) a K_i bázisából a jobbról érkező Jordan-láncok K_i-beli elemei és a K_{i-1} báziselemei által generált altérhez kiegészítő báziselemeket választani (ezt bonyolultabb esetben Gauss-eliminációval végezhetnénk).
A K_i magtér meghatározásához $(A-\lambda I)^i$ redukált lépcsős alakjára van szükségünk: L_i. Ezután az $(A-\lambda I)^{i+1}$ redukálásához elég az $L_i(A-\lambda I)$ alakból kiindulnunk, mert ha $L_i = P(A-\lambda I)^i$ valamely invertálható P-re, akkor az $L_i(A-\lambda I) = P(A-\lambda I)^{i+1}$ mátrixot is megkaphatjuk az $(A-\lambda I)^{i+1}$ mátrixból ugyanazokkal az elemi sorműveletekkel. Az egyenletrendszerből kihagyhatjuk a $\mathbf{0}$ sorokat, s mivel ezek a jobbról szorzásnál továbbra is $\mathbf{0}$ sorokba mennének, ez nem változtat a későbbi egyenletrendszerek megoldásán. (A Jordan-láncok előállításához nem kell előre meghatározni a Jordan-normálalakot: addig folytatjuk a hatványozást, amíg még csökken a mátrix rangja, vagy egyszerűbben, amíg a magtér dimenziója, azaz $n-$(a rang) el nem éri a λ algebrai multiplicitását.

$$A-2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(A-2I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok) $\lambda = 2$-höz:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xleftarrow{(A-2I)\cdot} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $\lambda = 1$-hez tartozó általánosított sajátvektorok mind sajátvektorok, tehát a Jordan-láncok itt 1-eleműek, a V_1 bázisát kell csak meghatározni.

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a Jordan-bázis a fenti vektorokból $\{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4 \,\}$.

B egyetlen sajátértéke a 3.

$$B-3I=\begin{bmatrix}0&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(B-3I)} \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$K_1: \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad K_2: \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok) $\lambda = 3$-hoz:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}3\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \xleftarrow{(B-3I)\cdot} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\3\\0\end{bmatrix} \quad \xleftarrow{(B-3I)\cdot} \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

A Jordan-bázis a fent kapott $\{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4 \,\}$, és a Jordan-normálalak két 2×2-es 3-blokkból áll:

$$\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}.$$

6. *Határozzuk meg az alábbi mátrix karakterisztikus és minimálpolinomját! Bontsuk fel a minimálpolinomot relatív prím faktorokra $\mathbb{R}$ fölött, és hozzuk a mátrixot ennek a felbontásnak megfelelő blokkdiagonális alakra! Mi a mátrix $\mathbb{C}$ fölötti Jordan-normálalakja?*

$$A = \begin{bmatrix}0&2&0\\-2&0&0\\2&0&4\end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = (4-x)(x^2+4)$. $\mathbb{C}$-ben ennek minden gyöke különböző $\Rightarrow \deg m_A(x) = 3 \Rightarrow m_A(x) = (x-4)(x^2+4)$, és a két tényező relatív prím (és irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött).
$\mathrm{Ker}(A-4I) = ?$

$$\begin{bmatrix}-4&2&0\\-2&-4&0\\2&0&0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(A-4I) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$$

$\mathrm{Ker}(A^2+4I) = ?$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\8&4&20\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1&1/2&5/2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(A^2+4I) = \mathrm{span}((-1,2,0),(-5,0,2))$$

$$P = \begin{bmatrix}0&-1&-5\\0&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}4&2&10\\0&5&0\\-2&-1&0\end{bmatrix} P^{-1}AP = \begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&5\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$

$\mathbb{C}$ fölött a sajátértékek $4, \pm 2i$, tehát ott A diagonalizálható, és a diagonális alakja, és így a Jordan-normálalakja is $\mathrm{diag}(4, 2i, -2i)$.

7. *Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Mutassuk meg, hogy szinguláris mátrixokra ez nem feltétlenül igaz! Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix valamelyik négyzetgyökét!*

Megoldás: Elég a reguláris Jordan-blokkokra belátni az állítást, ugyanis akkor egy teljes Jordan-mátrixból is lehet négyzetgyököt vonni (minden diagonális blokkot egy négyzetgyökével helyettesítve), és akkor a $J = P^{-1}AP$ Jordan-normálalak M négyzetgyökével $A = PJP^{-1} = PM^2P^{-1} = (PMP^{-1})^2$.
Legyen J egy $n \times n$-es λ-blokk, és $\mu^2 = \lambda$. Ha N egy $n \times n$-es μ-blokk, akkor N^2 átlójában λ, fölötte 2μ, fölötte 1-ek vannak, mindenhol máshol 0. Mivel $\mu \neq 0$, az $N^2 - \lambda I$ mátrix lépcsős alakú, $(n-1)$ rangú, ezért N^2 Jordan-normálalakja egy $n \times n$-es λ-blokk, azaz van olyan invertálható P, amelyre $P^{-1}N^2P = J$, vagyis $J = (P^{-1}NP)^2$.

Szinguláris mátrixból viszont nem feltétlenül lehet négyzetgyököt vonni. Például az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixnak nem lehet négyzetgyöke, mert ha lenne, annak is csak 0 lehetne a sajátértéke, így minimálpolinomja csak x vagy x^2 lehetne, de akkor annak a négyzete 0 lenne, és nem A.

Az előbbiekben láttuk, hogy a $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ Jordan-blokk négyzete hasonló az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Jordan-blokkhoz, csak most a hasonlóság mátrixát is meg kell adni.
$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B^2 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Ker}(B^2 - 2I) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1)$, $\mathrm{Ker}(B^2 - 2I)^2 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, így $\mathbf{e}_2$ egy 2 hosszúságú $(2\sqrt{2}, 0) \xleftarrow{B^2-2I} (0,1)$ Jordan-láncot generál. Így a $P = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ áttérési mátrixszal $(P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P = A$, vagyis A négyzetgyöke $P^{-1}BP = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

8. *Hasonlóság erejéig hány olyan* 3×3*-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $A \in M_3(\mathbb{C})$, és $A^3 = A^2$. Ekkor A minimálpolinomja osztója az $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ polinomnak. Ebből következik, hogy A sajátértékei csak 0 vagy 1 lehetnek. Ha A diagonalizálható, akkor a Jordan-normálalakja diagonális, 1-ekkel és/vagy 0-kkal az átlóban. Mivel a hasonlósági osztályokban a Jordan-blokkok sorrendje változtatható, csak az számít, hogy hány 1 és hány 0 van az átlóban: ez négy lehetőség. Ha A nem diagonalizálható, akkor a minimálpolinomnak van többszörös gyöke, és ez az $m_A(x) \mid x^2(x-1)$ miatt csak a 0 lehet. Tehát a minimálpolinom vagy x^2, vagy $x^2(x-1)$. Az első esetben a karakterisztikus polinom csak $-x^3$ lehet, és a Jordan-normálalak egy 2×2-es és egy 1×1-es 0-blokkból áll, a másodikban a karakterisztikus polinom $-x^2(x-1)$, és a Jordan-normálalak egy 2×2-es 0-blokkból és egy 1×1-es 1-blokkból áll. Tehát hasonlóság erejéig hat olyan mátrix van, amelynek a köbe megegyezik a négyzetével, és ezek Jordan-normálalakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$