1. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok Frobenius-normáját, 1-, 2- és ∞-normáját és spektrálsugarát!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $\|A\|_F = \sqrt{4} = 2$, $\|A\|_1 = \max\{1,2,1\} = 2$, $\|A\|_\infty = \max\{2,2,0\} = 2$, $\rho(A) = 1$, és $A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, aminek a karatkerisztikus polinomja $-x^3 + 4x^2 - 3x = -x(x-1)(x-3)$, így $\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{3}$.

$\|B\|_F = \sqrt{4} = 2$, $\|B\|_1 = \max\{2,2\} = 2$, $\|B\|_\infty = \max\{2,2\} = 2$, $k_B(x) = (x^2 - 2x + 2)$, B sajátértékei $1 \pm i$, és $\rho(B) = \sqrt{2}$. Végül $B^*B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, tehát B szinguláris értékei $\sqrt{2}, \sqrt{2}$, és így $\|B\|_2 = \sqrt{2}$.

2. *Mutassuk meg, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix spektrálsugara legföljebb akkora, mint bármely indukált mátrixnorma szerinti normája, képlettel:*

$$\rho(A) \leq \|A\|,$$

speciálisan legföljebb akkora, mint a 2-normája!

Megoldás: Legyen $\mathbf{v}$ a maximális abszolút értékű λ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ekkor $\|A\mathbf{v}| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\| = \rho(A)\|\mathbf{v}\|$, tehát $\|A\| \geq \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \rho(A)$.

3. *Mutassuk meg, hogy ha A normális mátrix, akkor a 2-normája egyenlő a spektrálsugarával!*

Megoldás: Legyen A normális mátrix, és $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ a sajátértékek abszolút értékei. Ekkor van olyan V unitér mátrix, amellyel $V^{-1}AV = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Vegyük az $U = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ unitér mátrixot, amelyre $\varepsilon_i = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}, & \text{ha } \lambda_i \neq 0 \\ 1, & \text{ha } \lambda_i = 0. \end{cases}$

Ekkor $A = VDV^* = (VU)\operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)V^*$ SVD felbontás, mert VU és V unitér, és a középső diagonális mátrix átlós elemei nemnegatív valós számok fogyó sorrendben. Így $\|A\|_2 = \sigma_1 = |\lambda_1|$.

4. *Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix legjobb 1 rangú közelítését a Frobenius-, 2-, 1- és ∞-norma szerint! (Az első kettőnél használjuk az Eckart–Young-tételt!.)*

Megoldás: A Frobenius- és 2-normában való közelítéshez számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix SVD felbontását.

$A^*A = \begin{bmatrix} 29 & 14 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$, és $k_{A^*A}(x) = x^2 - 37x + 36 = (x-36)(x-1)$.

A^*A ortonormált sajátpárjai $\left(36, \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\right)$ és $\left(1, \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\right)$. Ebből

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad AV = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből $A = U\Sigma V^*$, és $A^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}[6]\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24/5 & 12/5 \\ 12/5 & 6/5 \end{bmatrix}$.

A közelítés hibája Frobenius- és 2-normában is 1.

Az 1-norma és a ∞-norma közül elég a ∞-normára megoldani a feladatot, ugyanis a mátrix szimmetrikus, ezért a ∞-normabeli legjobb közelítés transzponáltja adja az 1-normabeli legjobb közelítést.

1 hibájú közelítést könnyű találni: $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, tehát csak azt kell megnézni, hogy van-e ennél jobb. Mivel minden számot legföljebb 1-gyel változtathatunk, a számok pozitívak maradnak, és a

felső sorban az első elem marad a nagyobb. Tehát ahhoz, hogy a rang 1 legyen, azaz a B közelítő mátrixban $b_{11}/b_{12} = b_{21}/b_{22}$ legyen, az alsó arányt növelni kell, a felsőt viszont csökkenteni, mivel $|x| + |y| < 1$-re

$$\frac{2+x}{2+y} \leq \frac{2+|x|}{2-|y|} = 1 + \frac{|x|+|y|}{2-|y|} < 2.$$

Az alsó arány növelése során gazdaságosabb csak a második elemet csökkenteni, ugyanis $x \neq 0$-ra

$$\frac{2+x}{2+y} \leq \frac{2+|x|}{2-|y|} < \frac{2}{2-|x|-|y|},$$

mert $4 - |x|^2 - 2|y| - |x||y| < 4 - 2|y|$, tehát az $f(x) = \frac{2}{2-z}$ monoton növő függvény ($[0,1)$-en) valamely $z < |x| + |y|$-ra veszi föl ugyanezt a $\frac{2+x}{2+y}$ arányt.
Ugyanígy érdemes az első sort is csak a második elemben változtatni. Itt az arányt csökkenteni kell, és $x \neq 0$-ra

$$\frac{5+x}{2+y} \geq \frac{5-|x|}{2+|y|} > \frac{5}{2+|y|+|x|},$$

ugyanis $3|x| - |x||y| - |x|^2 > 0$, mert a feltevés szerint $3 > 1 > |x| + |y|$. Tehát az $\frac{5}{2+z}$ monoton fogyó függvény a $[0,1)$-en valamely $z < |x| + |y|$-re veszi föl ugyanazt az $\frac{5+x}{2+y}$ arányt.

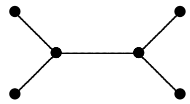
Végül azt kell megnéznünk, hogy $0 \leq x, y \leq 1$-re mi az x és y maximumának minimuma az $\frac{5}{2+x} = \frac{2}{2-y}$, azaz $2x+5y = 6$ feltétel mellett. Ezt a minimumot $y = x$ esetén érjük el, így $x = y = \frac{6}{7}$. Tehát ∞-normában a legjobban közelítő ≤ 1 rangú mátrix $\begin{bmatrix} 5 & 20/7 \\ 2 & 8/7 \end{bmatrix}$, a közelítés hibája pedig $6/7$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy d-reguláris egyszerű irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának spektrálsugara és* 1-, 2 *és* ∞*-normája is* d.

Megoldás: Minden sorösszeg és oszlopösszeg d, így az 1- és ∞-norma is d. A 4. feladat szerint emiatt a spektrálsugár legföljebb d, másrészt a csupa-1 vektor sajátvektor d sajátértékkel, így a spektrálsugár is d. Végül, mivel a mátrix szimmetrikus, így normális is, a spektrálsugara megegyezik a 2-normájával, tehát az utóbbi is d.

6. *Mi a spektruma az alábbi gráfoknak? Az a) és b) feladatbeli gráfra keressük meg a sajátvektorokat is!*

a) 3, *illetve* 4 *szögpontú teljes gráf*
b) 4 *hosszú kör*
c)

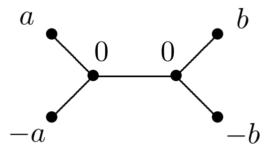


Megoldás: a) Általánosan is könnyű megadni a K_n teljes gráf spektrumát. Ugyanis a gráf szomszédsági mátrixa $J - I$, ahol J a csupa-1 mátrix. Tudjuk, hogy J-nek a 0 $(n-1)$-szeres sajátértéke (mivel $r(J) = 1$), és még az n egy sajátérték, tehát K_n sajátértékei: -1 $(n-1)$-szeresen, és $n-1$ (1-szeresen). Speciálisan $n = 3$-ra $-1, -1, 2$, és $n = 4$-re $-1, -1, -1, 3$. A K_n $(n-1)$-hez tartozó sajátvektora az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektor (és skalárszorosai). A -1-hez tartozó sajátalteret kigenerálják az $(1, -1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, -1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1, -1)$ vektorok (a 0-kban $1 + (-1) + 0 + \ldots + 0 = 0$ a szomszédok értékeinek összege, az 1 értékű csúcsban -1, a -1 értékűben pedig 1).

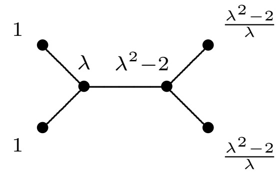
b) Mivel minden csúcs két szomszédja két átellenes (egy átló két végpontján levő) csúcs, 0-hoz csak az a vektor lehet sajátvektor, ahol az átellenes csúcsok értéke egymás negatívja, azaz (a négyszögön körbejárva) az $(a, b, -a, -b)$ alakú vektorok. Ezek egy 2-dimenziós sajátalteret generálnak. Mivel a gráf 2-reguláris, spektrálsugara a 2, és ehhez tartozó sajátvektor $(1, 1, 1, 1)$, továbbá mivel páros gráf (vagy mert a mátrixának a nyoma 0), a -2 is sajátérték, ehhez tartozik az $(1, -1, 1, -1)$ vektor. A spektrum ezek szerint $0, 0, 2, -2$.

c) Írjuk fel a gráfra, hogy a $\lambda = 0$ és a $\lambda \neq 0$ sajátértékekhez milyen sajátvektor tartozhat.

$\lambda = 0$ esetén a két középső csúcsban 0-nak kell lennie, mert a leveleken a szomszédok értékeinek összege 0. A középső csúcsokban is 0 kell, hogy legyen a szomszédok értékeinek összege, ezért az egy oldalon levő két csúcson az értékek egymás negatívjai.



Tehát a 0-hoz tartozó sajátaltér 2-dimenziós, és az $(1, -1, 0, 0, 0, 0)$ és $(0, 0, 0, 0, 1, -1)$ vektorok generálják.
Most tekintsünk egy $\lambda \neq 0$ sajátértéket. Ha valamelyik levélen 0 lenne, akkor könnyen látható, hogy minden csúcsban 0 állna, tehát nem kapnánk sajátvektort. Így feltehető, hogy az egyik levélen 1 áll. Ekkor a szomszédján λ, annak a másik levelén is 1, a másik középsőn $\lambda^2 - 2$, végül a maradék két levélen $\frac{\lambda^2-2}{\lambda}$.



A jobb oldali középső csúcs miatt $\lambda^3 - 2\lambda = \lambda + 2 \cdot \frac{\lambda^2-2}{\lambda}$, azaz $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$, amiből a másik négy sajátérték $\pm 1, \pm 2$. (A sajátvektorok is könnyen leolvashatók, ha az ábrán behelyettesítjük λ-ba a konkrét értékeket).