

*Munkaidő: 60 perc + 15 perc a fényképezésre és beküldésre*

1. Legyen  $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ ,  $p(x) \mapsto p(2) + p'(x)$ . Írjuk fel  $f$  mátrixát a standard  $(\{1, x, x^2\}, \{1, x\})$  bázispárban, és adjuk meg  $\text{Ker } f$  egy bázisát (polinomokkal is felírva)!.  
(4 pont)
2. Határozzuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  mátrix spektrálfelbontását, és ennek segítségével az  $A^n$  hatványt!  
(4 pont)
3. Számítsuk ki az  $\mathbf{u} = (1 + i, 2i, -1)$  és  $\mathbf{v} = (i, 1, 2 + i)$  vektorok  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  skalárszorzatát és a két vektor távolságát a  $\mathbb{C}^3$  euklideszi térben a standard hermitikus skalárszorzatra nézve!  
(2 pont)
4. Határozzuk meg az alábbi  $A$  mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(5 pont)

5. Az  $A = \begin{bmatrix} 1 & c+1 \\ -2 & c \end{bmatrix}$  mátrix a  $c \in \mathbb{R}$  milyen értékére normális, és ezek az esetek közül melyikben valósak a sajátértékei?  
(5 pont)