Munkaidő: 60 perc + 15 perc a fényképezésre és beküldésre

1. Írjuk fel az $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \bar{x}_1y_1 + i\bar{x}_1y_2 - 2\bar{x}_2y_1$ bilineáris függvény Gram-mátrixát a $\mathbb{C}^2$ standard bázisában, illetve a $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,i)\}$ bázisban!

(*3 pont*)

2. Mi a jellege az alábbi önadjungált mátrixoknak?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(*3 pont*)

3. A 2. feladat B mátrixához adjunk olyan bázist $\mathbb{R}^3$-ben, amelyben az $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ kvadratikus alak diagonális! (*3 pont*)

4. Az A mátrix teljes SVD-felbontása

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg ennek alapján az A redukált SVD-felbontását, legjobb 1 rangú közelítését és pszeudoinverzét! (*4 pont*)

5. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi A mátrixnak invariáns altere a $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ altér, ahol $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0)$ és $\mathbf{v}_2 = (1,0,2)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(*3 pont*)

6. Adjuk meg a Jordan-normálalakját azoknak a mátrixoknak, amelyeknek a karakterisztikus polinomja $k(x) = -(x-1)^3(x-2)^2$, és a minimálpolinomjuk legalább negyedfokú! Melyikre a legnagyobb az 1-hez tartozó sajátaltér dimenziója? (*4 pont*)