1. Határozzuk meg a spektrumát annak az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak, amelynek minden eleme 1. Diagonalizálható-e ez a mátrix, és ha igen, mi a diagonális alakja?

2. Melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ fölött?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását és ennek segítségével a 12-edik hatványát! Mi a $\mathbf{v} = (1,2,2)$ vektor vetülete a sajátalterekre a $\oplus V_{\lambda_i}$ felbontáshoz tartozó vetítésnél?

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

4. Rajzoljuk fel az $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1-i & i \end{bmatrix}$ mátrix és az A^2 mátrix Gersgorin-köreit, és ezek segítségével adjunk felső becslést A sajátértékeinek abszolút értékére. (Tudjuk, hogy ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.)

5. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi A mátrixnak van legalább két valós sajátértéke! (Használjuk a Gersgorin-köröket!)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: március 4.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Az alábbi mátrix két elemét nem ismerjük, de tudjuk, hogy egyik sajátértéke 3. Mi a másik két sajátértéke?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Adjunk meg olyan 2×2-es A mátrixot, amelyre $A^4 = A^2 \neq A$, és A-nak egyetlen eleme sem 0. (Útmutatás: keressünk a $D^4 = D^2 \neq D$ tulajdonságot kielégítő diagonális D mátrixot, és konjugáljuk el alkalmas P-vel.)

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását, és ennek segítségével számítsuk ki a mátrix 10-edik hatványát!

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ spektrálfelbontását. Számítsuk ki a $B = \sqrt{\lambda_1}\, P_1 + \sqrt{\lambda_2}\, P_2$ mátrixot, és ellenőrizzük, hogy erre $B^2 = A$.

5. Írjuk fel, és ábrázoljuk az alábbi mátrix sorokhoz és oszlopokhoz tartozó Gersgorin-köreit, és rajzoljuk fel azt a tartományt $\mathbb{C}$-ben, amelybe ezek alapján a sajátértékeknek esniük kell. Számítsuk ki pontosan is a sajátértékeket, és ezeket is jelöljük az ábrán.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -1+i & 1+i \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin-köreit, és ennek alapján adjunk minél jobb becslést arra, hogy a két sajátérték képzetes része milyen intervallumba esik.

7*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \times n$-es A, B mátrixokra AB-nek és BA-nak ugyanazok a sajátértékei, és a nemnulla sajátértékeiknek ugyanakkora a geometriai multiplicitása is, de a nullának nem feltétlenül.