1. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^4$ vektorok által kifeszített W altérnek egy ortogonális bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval! Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (1,2,3,4)$ vektor merőleges vetületét W-re, és adjuk meg a vetület koordinátavektorát a megadott ortogonális bázisban.

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,0,-1),\ \mathbf{v}_2 = (1,-1,0,1),\ \mathbf{v}_3 = (1,3,1,-1)$$

2. Tekintsük az $(1,1,0,1),(1,1,0,0)$ által kifeszített W alteret $V = \mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.
a) Mutassuk meg, hogy $W^\perp$ nem direkt kiegészítője W-nek.
b) Válasszunk ki a $\mathbb{Z}_2^4$ standard $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ bázisából két elemet, amelyek W-nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!

3. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$-et mint euklideszi teret az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix által megadott $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A := \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalárszorzattal. Legyen $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1)$.
a) Mi lesz az $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_A$ és $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A$, skalárszorzatok értéke, és mi az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ hossza ebben az euklideszi térben?
b) Adjunk meg erre a skalárszorzatra nézve ortonormált bázist $\mathbb{R}^2$-ben!

4. Mutassuk meg, hogy az $n \times n$-es ortogonális mátrixok csoportot alkotnak, azaz ortogonális mátrixok szorzata ortogonális, inverze ortogonális és az egységmátrix ortogonális.

5. Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket!

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. a) Írjuk fel azt a 2×2-es forgatásmátrixot, amely az $(1,2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5},0)$ vektorba!
b) Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1,-1,1,-1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés standard mátrixát!
c) Írjuk fel annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, amely a $v = (1,-1,1,-1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

7. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az A mátrix QR-felbontását, valamint teljes QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

8. A 7. feladat A mátrixára határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyetlen legjobban közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (0,0,0,1)$. Miért van csak egy legjobban közelítő megoldás?

Házi feladatok

Beadási határidő: március 11.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített térnek egy ortogonális bázisát a standard skalárszorzatra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,2,1,2),\ \mathbf{v}_3 = (1,2,3,6).$$

Számítsuk ki a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok koordinátavektorait erre az ortogonális bázisra nézve!

2. Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,1,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (0,-1,0,0)$ ortogonális bázist alkotnak az $\mathbb{R}^4$ standard euklideszi térben. Legyen $W := \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$. Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1,3,0,2)$ vektor W-re való merőleges vetületét, és bontsuk az $\mathbf{x}$ vektort egy W-beli és egy $W^\perp$-beli vektor összegére!

3. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ euklideszi teret az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalárszorzattal, ahol $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Adjunk meg ebben a térben egy ortonormált bázist az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A$ skalárszorzatra nézve a $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ bázis Gram–Schmidt-ortogonalizálásával.

4. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását és teljes QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

5. Tekintsük a 4. feladatbeli A mátrixot. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer legjobban közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (4,0,0,0)$.

6. a) Írjuk fel azt a 2×2-es forgatásmátrixot, amely a $(2,-1)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!

b) Adjuk meg azt a Householder-tükrözést, amely a $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla és az első koordináta pozitív.

7*. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^n$ bármely merőlegességtartó lineáris transzformációja (azaz olyan f lin. tr., amelyre $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow f(\mathbf{u}) \perp f(\mathbf{v})$) egy ortogonális transzformáció skalárszorosa.