1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus mátrix nem indefinit, lehet csupán lefelé ható sorműveletekkel felső háromszög alakra hozni (ahogy az LU-felbontásban), és az így kapott háromszögmátrix diagonális része kongruens az eredeti mátrixszal (tehát meghatározza a jellegét).

2. a) Határozzuk meg az alábbi A mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét.
b) Írjuk fel az A mátrixot $A = R^T R$ alakban, ahol R felső háromszögmátrix, nemnegatív diagonális elemekkel.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

3. a) Határozzuk meg a $W = \operatorname{span}((1,1,0),(0,2,1))$ altér jobb és bal oldali merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B\mathbf{y}$ valós bilineáris függvényre nézve, ha

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Határozzuk meg a φ-hez tartozó kvadratikus alakot és annak jellegét.
c) Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot.

4. Legyen egy φ komplex skalárszorzat (azaz pozitív definit hermitikus bilin. fv.) Gram–mátrixa az $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \,\}$ standard bázisban $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$.
a) Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, \varphi)$ euklideszi térben.
b) Adjunk meg egy φ-ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben.
c) Adjuk meg φ Gram-mátrixát abban a $\mathcal{B}$ bázisban, amelynek elemei $\mathbf{b}_1 = (1, i)$ és $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.

5. Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$ hermitikus bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak jellegét, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ kvadratikus alakot az x_1, x_2, x_3 polinomjaként, és írjuk fel a kvadratikus alakot egy φ-ortogonális bázisban is.

6. Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!

7. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \det[\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$ bilineáris függvényt. Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban! Van-e $\mathbb{R}^2$-nek φ-ortogonális bázisa?

Házi feladatok

Beadási határidő: április 15.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixhoz azt a pozitív szemidefinit B mátrixot, amelyre $B^2 = A$.

2. Adjuk meg az alábbi A mátrix $A = R^T R$ Cholesky-felbontását, ahol R felső háromszögmátrix nemnegatív diagonális elemekkel!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$-ben az $(1, -1, 1)$ vektor által generált altér bal, illetve jobb oldali merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ bilineáris függvényre nézve, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i\bar{x}_1 y_2 - i\bar{x}_2 y_1$.
a) Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban!
b) Lássuk be, hogy φ hermitikus!
c) Határozzuk meg a jellegét!

5. Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben az előző feladatbeli φ mátrixa diagonális! Írjuk fel a bilineáris függvényt ebben a bázisban (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 polinomjaként kifejezve).

6. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, és tekintsük a

$$\varphi(p, q) = p(a)q(b) + q(a)p(b)$$

bilineáris függvényt a legfeljebb elsőfokú valós polinomok terén. Írjuk fel a φ mátrixát a standard $\{1, x\}$ bázisban! Az a és b értékétől függően mi a jellege a φ-hez tartozó kvadratikus alaknak?

7*. a) Bizonyítsuk be, hogy az 1. feladat A mátrixának minden négyzetgyöke szimmetrikus, sőt, csak a feladat megoldásában szereplő B és $-B$ az A négyzetgyökei!
b) Adjunk példát olyan szimmetrikus, nem nulla mátrixra, amelynek van nem szimmetrikus négyzetgyöke is $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben!