1. *Határozzuk meg a spektrumát annak az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak, amelynek minden eleme 1. Diagonalizálható-e ez a mátrix, és ha igen, mi a diagonális alakja?*

Megoldás: $n = 1$-re a spektrum $\{1\}$.
Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Mivel $r(A) = 1 < n$, a 0 szükségképpen sajátérték, és $\dim V_0 = n-1$. A geometriai multiplicitás nem lehet nagyobb az algebrainál, így a 0 algebrai multiplicitása is legalább $n-1$, ezért ezen kívül már csak egy sajátérték lehet, legyen ez λ. A mátrix nyoma $n = 0 + \ldots + 0 + \lambda = \lambda$, tehát a spektrum az algebrai multiplicitásokkal $\{0, \ldots, 0, n\}$ (a 0-t n-szer véve).
Ebből az is következik, hogy az algebrai multiplicitások megegyeznek a geometriaiakkal, ezért A diagonalizálható, és a diagonális alakja $\mathrm{diag}(0, 0, \ldots, 0, n)$.

2. *Melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ fölött?*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x = -x(x-1)(x-2)$, vagyis a 3×3-as mátrixnak három különböző valós gyöke van, így diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött is.
$k_B(x) = (x-1)^2$, de $r(B-I) = 1$ miatt $\dim V_1 = 2 - 1 = 1$ kisebb az 1 algebrai multiplicitásánál, így B sem $\mathbb{R}$, sem $\mathbb{C}$ fölött nem diagonalizálható.
$k_C(x) = -x^3 - x = -x(x^2+1)$ nem bontható $\mathbb{R}$ fölött lineáris faktorokra, ezért C az $\mathbb{R}$ fölött nem diagonalizálható. Viszont $\mathbb{C}$ fölött $k_C(x) = -x(x-i)(x+i)$ mutatja, hogy C-nek $\mathbb{C}$-ben három különböző sajátértéke van, ezért $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható.

3. *Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását és ennek segítségével a 12-edik hatványát! Mi a $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ vektor vetülete a sajátalterekre a $\oplus V_{\lambda_i}$ felbontáshoz tartozó vetítésnél?*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A spektrálfelbontást kiszámíthatjuk az $A = PDP^{-1}$ felbontás sajátértékek szerint csoportosított összegre bontásából, de a sajátvektorok megkeresése és P invertálása helyett a spektrálfelbontás vetítőmátrixait meghatározhatjuk az alábbi egyenletrendszerből is:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & + & \ldots & + & P_k & = & I \\ \lambda_1 P_1 & + & \ldots & + & \lambda_k P_k & = & A \\ \ldots & & & & & & \\ \lambda_1^{k-1} P_1 & + & \ldots & + & \lambda_k^{k-1} P_k & = & A^{k-1} \end{array}$$

ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a diagonalizálható A mátrix sajátértékei. Esetünkben
$|A - xI| = -(x+1)^2(x-2)$, és $r(M+I) = 1$ miatt $\dim V_{-1} = 2$, így M diagonalizálható, tehát használhatjuk a módszert.
A P_1, P_2-re felírt egyenletrendszer

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & I \\ -1 & 2 & A \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & I \\ 0 & 3 & A+I \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}A \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I \end{array}\right] \qquad \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{1}{3}(2I - A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{3}(A+I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tehát
$$A = (-1)\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$
a spektrálfelbontás, és
$$A^{12} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix} + 4096\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4096 & 4095 & -4095\\ 4095 & 4096 & -4095\\ 4095 & 4095 & -4094\end{bmatrix}$$
A $\mathbf{v}$ vektor vetületei a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ($\mathbf{v}_1 \in V_{-1}$, $\mathbf{v}_2 \in V_2$) felbontás alapján: $\mathbf{v}_1 = P_1\mathbf{v} = (0,1,1)$ és $\mathbf{v}_2 = P_2\mathbf{v} = (1,1,1)$.

4. *Rajzoljuk fel az* $A = \begin{bmatrix}1+i & 1\\ 1-i & i\end{bmatrix}$ *mátrix és az* A^2 *mátrix Gersgorin-köreit, és ezek segítségével adjunk felső becslést* A *sajátértékeinek abszolút értékére. (Tudjuk, hogy ha* λ *sajátértéke* A*-nak, akkor* λ^2 *sajátértéke* A^2*-nek.)*

Megoldás: A sorokhoz tartozó Gersgorin-körök $|z-(1+i)| \le 1$ és $|z-i| \le \sqrt{2}$. Mindkettőben $1+\sqrt{2}$ a maximális abszolút érték (a kör középpontja origótól vett távolságának és a kör sugarának összege), így az uniójukban is az. Az oszlopokhoz tartozó Gersgorin-körök $|z-(1+i)| \le \sqrt{2}$ és $|z-i| \le 1$, itt a maximális abszolút érték $2\sqrt{2}$ és 2, a maximumuk $2\sqrt{2}$. A sajátértékek mindkét unióban benne vannak, így $|\lambda| \le \min\{1+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\} = 1+\sqrt{2} \approx 2,41$. $A^2 = \begin{bmatrix}1+i & 1+2i\\ 3+i & -i\end{bmatrix}$. Az A^2 soraihoz tartozó Gersgorin-körök $|z-(1+i)| \le \sqrt{5}$, $|z+i| \le \sqrt{10}$, az oszlopokhoz tartozók pedig $|z-(1+i)| \le \sqrt{10}$, $|z+i| \le \sqrt{5}$. Tehát $|\lambda^2| \le \min\{\max\{\sqrt{2}+\sqrt{5}, 1+\sqrt{10}\}, \max\{\sqrt{2}+\sqrt{10}, 1+\sqrt{5}\}\} = 1+\sqrt{10}$, így $|\lambda| \le \sqrt{1+\sqrt{10}} \approx 2,04$.

5. *Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi* A *mátrixnak van legalább két valós sajátértéke! (Használjuk a Gersgorin-köröket!)*
$$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 9 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 6\end{bmatrix}$$
Megoldás: Az oszlopokhoz tartozó Gersgorin-körök:
$$G_1: |z-2| \le 1, \quad G_2: |z-9| \le 1, \quad G_3: |z-2| \le 5, \quad G_4: |z-6| \le 1.$$
Itt $G_1 \cup G_3 \cup G_4 = G_3$ diszjunkt G_2-től, ezért a négy sajátértékből (multiplicitással számolva) az első hármat, a második egyet tartalmaz. Viszont valós együtthatós polinom (ilyen a valós mátrix karakterisztikus polinomja is) nem valós gyökei konjugált párokat alkotnak, tehát az x tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el, ahogy a G_1, G_2, G_3, G_4 Gersgorin-körök is. Így a G_3-ba eső három sajátértékből legföljebb egy pár lehet az x tengelyen kívül, a G_2-ben levő pedig szükségképpen az x tengelyen van. Tehát A-nak van legalább két különböző valós sajátértéke. (Valójában pontosan kettő van.)