1. *Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!*

Megoldás: Az első tükrözés az $(1,-2,2)$ vektort viszi a $(3,0,0)$-ba, azaz a $(2,2,-2)$, vagy kényelmesebben az $(1,1,-1)$ normálvektorú síkra tükrözünk.

$$Q_1A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A második tükrözés az első koordinátát helybenhagyva az yz-sík $(4,3)$ vektorát viszi az $(5,0)$ vektorba. Ez az yz-síkon az $(1,-3)$ normálvektorú egyenesre való tükrözés, amelynek mátrixa $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, tehát

$$Q_2Q_1A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = R$$

és

$$Q = (Q_2Q_1)^{-1} = Q_1^TQ_2^T = Q_1Q_2 = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -14 \\ -10 & 10 & -5 \\ 10 & 11 & 2 \end{bmatrix}\text{-re } A = QR$$

(Itt $Q_i^T = Q_i$, mert a tükröző mátrixok szimmetrikusak.)

2. *Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!*

Megoldás:

$$Q_1A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2Q_1A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = R$$

$$Q = (Q_2Q_1)^T = Q_1^TQ_2^T = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} -52 & 15 & -36 \\ 39 & 20 & -48 \\ 0 & -60 & -25 \end{bmatrix}\text{-re } A = QR.$$

3. *Számítsuk ki az* $\mathbf{a} = (1, i, 1+i)$ *és* $\mathbf{b} = (1-i, i, 1+i)$ *vektorok skaláris szorzatát és távolságát!*

Megoldás: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = 1(1-i) - i\cdot i + (1-i)(1+i) = 4 - i.$
$|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |(i,0,0)| = 1.$

4. *Ortogonalizáljuk a $\mathbb{C}^3$-beli $\{(i,0,1),\ (1,i,1+i)\}$ vektorrendszert, és egészítsük ki $\mathbb{C}^3$ ortogonális bázisává! Tegyük ortonormálttá ezt a bázist!*

Megoldás: Egészítsük ki rögtön bázissá a $\mathbf{b}_1 = (i,0,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,i,1+i)$ vektorrendszert, mondjuk, a $\mathbf{b}_3 = (0,0,1)$ vektorral, és ezt a bázist ortogonalizáljuk, akkor az új bázis első két vektora az eredeti vektorrendszer ortogonalizáltja lesz.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = (i,0,1)$,
$\mathbf{c}_2' = \mathbf{b}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 = (1-\frac{1}{2}i,\ i,\ \frac{1}{2}+i)$. Legyen $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2' = (2-i,\ 2i,\ 1+2i)$.
$\mathbf{c}_3' = \mathbf{b}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 - \frac{1-2i}{14}\mathbf{c}_2 = (0,0,1) - \frac{1}{2}(i,0,1) - \frac{1}{14}(-5i,4+2i,5) = \frac{1}{7}(-i,-2-i,1)$.
Legyen $\mathbf{c}_3 = (-i,-2-i,1)$.
Tehát az eredeti vektorrendszer ortogonalizáltja $\{(i,0,1),(2-i,\ 2i,\ 1+2i)\}$, az ennek kiegészítésével kapott ortogonális bázis $\{(i,0,1),\ (2-i,2i,1+2i),\ (-i,-2-i,1)\}$, az ortonormált pedig $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{14}}(2-i,2i,1+2i),\ \frac{1}{\sqrt{7}}(-i,-2-i,1)\}$.

5. *Legyen $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x}+i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}-i\mathbf{y},\ \mathbf{x}+i\mathbf{y}\rangle &= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x},i\mathbf{y}\rangle + \langle -i\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \langle -i\mathbf{y},i\mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + i\,\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + i\,\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + i\cdot i\,\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle = \\ &= |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 + i\,\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + i\overline{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle} = |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 + 2i\,\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 = 0 \text{ és } \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow\ |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| \text{ és } \mathbf{x}\perp\mathbf{y}.$$

6. *Döntsük el az alábbi mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix},\qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix},\qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: B önadjungált, ezért normális is, de nem ferdén önadjungált, és nem unitér. C unitér, ezért normális is, de nem önadjungált, és nem is ferdén önadjungált. A nem unitér, nem önadjungált, és nem ferdén önadjungált. A normalitást ellenőrizhetjük az $A^*A = AA^*$ egyenlőséggel, vagy észrevehetjük, hogy A egy unitér (és így normális) mátrix skalárszorosa, ezért maga is normális. Végül D szintén nem önadjungált, ferdén önadjungált vagy unitér, és a normalitást ellenőrizve azt látjuk, hogy $D^*D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, míg $DD^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ezért D nem is normális.