1. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus mátrix nem indefinit, lehet csupán lefelé ható sorműveletekkel felső háromszög alakra hozni (ahogy az LU-felbontásban), és az így kapott háromszögmátrix diagonális része kongruens az eredeti mátrixszal (tehát meghatározza a jellegét).*

Megoldás: Tegyük fel, hogy az A mátrix első $i-1$ oszlopból álló részmátrixát sikerült felső háromszögalakra hozni lefelé ható sorműveletekkel (legyen az A mátrixból így kapott mátrix A'), de az i.-et nem sikerül, mert $a'_{ii} = 0$, de van olyan $j > i$, hogy $a'_{ji} \neq 0$. Hajtsuk végre az eddigi sorműveleteknek megfelelő oszlopműveleteket az A'-n, így egy $A'' \cong A$ szimmetrikus mátrixot kapunk, amelynek az átlója és az első i diagonális eleme alatti része ugyanaz, mint az A' mátrixban, mert csak diagonális alatt csupa nullát tartalmazó oszlopok skalárszorosát adtunk hozzá nagyobb indexűekhez. De ebben az i. és j. sorok és oszlopok által meghatározott szimmetrikus elhelyezkedésű 2×2-es részmátrix $\begin{bmatrix} 0 & a''ij \\ a'_{ji} & a'_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a'ji \\ a'_{ji} & a'_{jj} \end{bmatrix}$, amelynek determinánsa $-(a'_{ji})^2$ negatív, így ez a részmátrix indefinit, és emiatt A'' és a vele kongruens A is indefinit lenne.
Tehát végig tudjuk csinálni az LU-felbontást (legyen az U diagonális elemeit tartalmazó diagonális mátrix D), és az L transzponáltjával jobbról szorozva (azaz a sorműveleteknek megfelelő oszlopműveleteket elvégezve) a fenti indoklás miatt A-val kongruens, U-val azonos diagonálisú szimmetrikus felső háromszögmátrixot kapunk, azaz $D \cong A$.

2. *a) Határozzuk meg az alábbi A mátrix pozitív (szemi)definit négyzetgyökét.*
b) Írjuk fel az A mátrixot $A = R^T R$ alakban, ahol R felső háromszögmátrix, nemnegatív diagonális elemekkel.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a) Mivel A szimmetrikus, diagonalizálható is, és így van spektrálfelbontása.
$k_A(x) = -x^3 + 18x^2 - 81x = -x(x-9)^2$, tehát a sajátértékei $9, 9, 0$.
A spektrálfelbontást meghatározó egyenletek: $P_1 + P_2 = I$, $9P_1 + 0P_2 = A$, így $P_1 = \frac{1}{9}A$, az A felbontása $A = 9(\frac{1}{9}A) + 0P_2 \Rightarrow$ a pozitív szemidefinit négyzetgyök $B = 3(\frac{1}{9}A) + 0P_2 = \frac{1}{3}A$.
Alternatív megoldás:
Kicsit fáradságosabb az ortogonális diagonalizálással való négyzetgyökvonás.
A 0-hoz tartozó egységnyi sajátvektor $\frac{1}{3}(2, -2, 1)$. V_9 ennek a merőleges kiegészítője, annak egy lehetséges ortonormált bázisa $\{\, \frac{1}{3}(2, 1, -2), \frac{1}{3}(1, 2, 2)\,\}$. Tehát a

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ortogonális mátrixszal $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(0, 9, 9) = D$, azaz $A = QDQ^{-1}$, és ebből A egy négyzetgyöke $Q\sqrt{D}Q^{-1} = Q\sqrt{D}Q^T =$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix},$$

amely szintén pozitív szemidefinit, mert egy pozitív szemidefinit diagonális mátrix ortogonálissal való konjugáltja.

b) Az A LU-felbontása:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & 9/5 & 18/5 \\ 0 & 18/5 & 36/5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & 9/5 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U,$$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ -2/5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$-re $A = LU = LDL^T$, ahol $D = \operatorname{diag}(5, \frac{9}{5}, 0)$ az U diagonális része.

Tehát $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ -2/5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R^T R$, ahol

$R = \sqrt{D} L^T = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. *a) Határozzuk meg a* $W = \operatorname{span}((1,1,0),(0,2,1))$ *altér jobb és bal oldali merőlegesét a* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{y}$ *valós bilineáris függvényre nézve, ha*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Határozzuk meg a φ*-hez tartozó kvadratikus alakot és annak jellegét.*

c) Adjunk meg $\mathbb{R}^3$*-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot.*

Megoldás: a) Legyen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a W báziselemeiből mint oszlopokból álló mátrix. Ekkor
$W_\varphi^\perp = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid C^T B \mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} = \mathcal{N}(C^T B)$.

$$C^T B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $W_\varphi^\perp = \operatorname{span}((2,1,-1))$,
és ${}^\perp W_\varphi = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T B C = \mathbf{0}^T \,\} = \{\, \mathbf{x} \mid C^T B^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} = \mathcal{N}(C^T B^T)$

$$C^T B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tehát ${}^\perp W_\varphi = \operatorname{span}((-11,-2,3))$.

b),c) A kvadratikus alak mátrixa

$$A = \frac{1}{2}(B + B^T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

és a diagonális alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D,$$

tehát a kvadratikus alak indefinit, és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = P$$

mutatja, hogy a $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$ bázisban veszi fel ezt a diagonális alakot.
A standard bázisban a kvadratikus alak $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, a $\mathcal{B}$ bázisban $(x_1')^2 + 4(x_2')^2 - (x_3')^2$.

4. *Legyen egy φ komplex skalárszorzat (azaz pozitív definit hermitikus bilin. fv.) Gram–mátrixa az $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ standard bázisban* $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$.

a) Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, \varphi)$ euklideszi térben.
b) Adjunk meg egy φ-ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben.
c) Adjuk meg φ Gram-mátrixát abban a $\mathcal{B}$ bázisban, amelynek elemei $\mathbf{b}_1 = (1, i)$ és $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$.

Megoldás: a) A standard bázis elemeinek skalárszorzatát egyszerűen leolvashatjuk a Gram-mátrixból: $\mathbf{e}_i^* A \mathbf{e}_j = a_{ij}$. Tehát $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{2}$, és $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = i$.

b) Mivel pozitív definit hermitikus bilineáris függvényről van szó, használhatjuk a Gram–Schmidt-ortogonalizálást.

$$\mathbf{c}_2' := \mathbf{e}_2 - \frac{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 = (0,1) - \frac{i}{2}(1,0) = \left(-\frac{i}{2}, 1\right) \Rightarrow \mathbf{c}_2 = (-i, 2).$$

Tehát $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{c}_2\}$ φ-ortogonális vektorrendszer, és $\mathbf{e}_1$ φ-normája $\sqrt{2}$, míg

$$\varphi(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2) = \begin{bmatrix} i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} = 6,$$

ezért $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-i,2) \right\}$ φ-ortonormált bázis.
Alternatív megoldás: szimultán sor-oszlopműveletekkel is diagonalizálhatjuk a mátrixot, ahogy az 5. feladatban, sőt kanonikus alakra is hozhatjuk, hogy ne csak φ-ortogonális, hanem rögtön φ-ortonormált bázist kapjunk.

$$\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & i \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \overset{s}{\mapsto} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az áttérés mátrixának kiszámításához pedig végrehajtjuk az oszlopműveleteket az egységmátrixra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -i/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{o}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & (-i/2)\sqrt{2/3} \\ 0 & \sqrt{2/3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Ez is a $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-i,2) \right\}$ ortonormált bázist adja.

c) Az új bázisra való áttérés P mátrixa és az új bázisbeli Gram-mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad [f]_{\mathcal{B}} = P^*[f]_{\mathcal{E}}P = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}.$$

5. *Határozzuk meg a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*A\mathbf{y}$ hermitikus bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alak jellegét, ahol*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ kvadratikus alakot az x_1, x_2, x_3 polinomjaként, és írjuk fel a kvadratikus alakot egy φ-ortogonális bázisban is.

Megoldás: $q(\mathbf{x}) = |x_1|^2+2|x_2|^2+3|x_3|^2+i\bar{x}_1x_2-i\bar{x}_2x_1+(1+i)\bar{x}_1x_3+(1-i)\bar{x}_3x_1+\bar{x}_2x_3+\bar{x}_3x_2$ a kvadratikus alak. A jelleg (és a φ-ortogonális bázis) meghatározásához szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizálunk. Figyeljünk arra, hogy ha a sorművelet $s_i \mapsto s_i + cs_j$, akkor az oszlopművelet $o_i \mapsto o_i + \bar{c}o_j$. Az I egységmátrixra végrehajtva az alkalmazott oszlopműveleteket, megkapjuk az új bázisra való áttérés mátrixát.

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 1 \\ 1-i & 1 & 3 \end{bmatrix} \xmapsto[s_3-(1-i)s_1]{s_2+is_1} \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[o_3-(1+i)o_1]{o_2-io_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xmapsto{s_3+is_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{o_3-io_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[o_3-(1+i)o_1]{o_2-io_1} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1-i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{o_3-io_2} \begin{bmatrix} 1 & -i & -2-i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$$

Tehát a diagonális alak $\operatorname{diag}(1,1,0)$, és a hozzá tartozó bázis $\{(1,0,0),\ (-i,1,0),\ (-2-i,-i,1)\}$. A kvadratikus alak pozitív szemidefinit, az új bázisban $(x_1')^2 + (x_2')^2$.

6. *Bizonyítsuk be, hogy minden indefinit hermitikus bilineáris függvényre nézve van olyan nem nulla vektor, amely merőleges önmagára!*

Megoldás: Ha a φ bilineáris függvény indefinit, akkor van olyan φ-ortogonális bázis, amelynek elemein a φ-hez tartozó kvadratikus alak pozitív és negatív értéket is fölvesz. Legyen $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ ez a két báziselem. Ekkor $\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) = s^2$, $\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) = -t^2$, és $\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c}) = \varphi(\mathbf{c},\mathbf{b}) = 0$, ahol s,t nemnulla valós számok. Az $\mathbf{u} = t\mathbf{b} + s\mathbf{c}$ vektor nem nulla, mert különben $\mathbf{c} = -\frac{t}{s}\mathbf{b}$-re $\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) = \frac{t^2}{s^2}\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) > 0$ lenne, és $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{u}) = t^2\varphi(\mathbf{b},\mathbf{b}) + s^2\varphi(\mathbf{c},\mathbf{c}) - st\varphi(\mathbf{b},\mathbf{c}) - st\varphi(\mathbf{c},\mathbf{b}) = t^2s^2 - s^2t^2 = 0$.

7. *Tekintsük $\mathbb{R}^2$-en a $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det[\mathbf{u} \mid \mathbf{v}]$ bilineáris függvényt. Írjuk fel φ Gram-mátrixát a standard bázisban! Van-e $\mathbb{R}^2$-nek φ-ortogonális bázisa?*

Megoldás:

$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Tehát a Gram-mátrix a standard bázisban $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Nincs φ-ortogonális bázis, mert ha lenne, akkor A kongruens lenne egy diagonális, így szimmetrikus mátrixszal, tehát A maga is szimmetrikus lenne.