

1. Legyen  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  az origó körüli  $+45^\circ$ -os forgatás,  $B$  pedig az  $x$  tengely irányú kétszeres nyújtás standard mátrixa. Határozzuk meg a két mátrix és a  $BA$  szorzatmátrix 1-, 2- és  $\infty$ -normáját geometriai és algebrai módszerrel is!

*Megoldás:* Az 1-normához tartozó „egységkör” az  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$  csúcsú négyzet, amelyet az  $A$  vízszintes-függőleges oldalú négyzetbe forgat, és az ezt tartalmazó legkisebb, origó körüli „kör” csúcsai  $(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2})$ . tehát az eredetinek  $\sqrt{2}$ -szerese, így  $\|A\|_1 = \sqrt{2}$ . Az  $x$  irányú kétszeres nyújtás pedig  $(2, 0), (0, 1), (-2, 0), (0, -1)$  csúcsú rombuszba képezi az „egységkört”, és az 2 sugarú origó középpontú „kör”-be fér bele, így  $\|B\|_1 = 2$ .

A  $\infty$ -normához tartozó „egységkör” az  $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$  csúcsú négyzet, az elforgatottjának a csúcsai  $(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2})$ , és ez az eredetinek  $\sqrt{2}$ -szeresébe fér bele, tehát  $\|A\|_\infty = \sqrt{2}$ . Az  $x$  irányú kétszeres nyújtás ezt az „egységkört”  $(2, 1), (-2, 1), (-2, -1), (2, -1)$  csúcsú téglalapba viszi, ami az eredeti négyzet kétszeres nagyítottjába fér bele, tehát  $\|B\|_\infty = 2$ . Végül az euklideszi egységkört a forgatás önmagába viszi, így  $\|A\|_2 = 1$ , a nyújtás pedig olyan ellipszisbe viszi, ami 2 sugarú körbe fér bele, így  $\|B\|_2 = 2$ .

Mátrixosan:  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  és  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Közvetlenül leolvasható, hogy  $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \sqrt{2}$ ,  $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = 2$ , s mivel  $A^*A = I$ , és  $B^*B = \text{diag}(4, 1)$ , a 2-normájuk, azaz a legnagyobb szinguláris értékük  $\|A\|_2 = 1$  és  $\|B\|_2 = 2$ .

2. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Frobenius-normáját, 1-, 2- és  $\infty$ -normáját és spektrálsugarát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Megoldás:*  $\|A\|_F = \sqrt{4} = 2$ ,  $\|A\|_1 = \max\{1, 2, 1\} = 2$ ,  $\|A\|_\infty = \max\{2, 2, 0\} = 2$ ,  $\rho(A) = 1$ , és  $A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , aminek a karakterisztikus polinomja  $-x^3 + 4x^2 - 3x = -x(x-1)(x-3)$ , így  $\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{3}$ .

$\|B\|_F = \sqrt{4} = 2$ ,  $\|B\|_1 = \max\{2, 2\} = 2$ ,  $\|B\|_\infty = \max\{2, 2\} = 2$ ,  $k_B(x) = (x^2 - 2x + 2)$ ,  $B$  sajátértékei  $1 \pm i$ , és  $\rho(B) = \sqrt{2}$ . Végül  $B^*B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , tehát  $B$  szinguláris értékei  $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ , és így  $\|B\|_2 = \sqrt{2}$ .

3. Mutassuk meg, hogy egy  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mátrix spektrálsugara legföljebb akkora, mint bármely indukált mátrixnorma szerinti normája, képlettel:

$$\rho(A) \leq \|A\|,$$

speciálisan legföljebb akkora, mint a 2-normája!

*Megoldás:* Legyen  $\mathbf{v}$  a maximális abszolút értékű  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ekkor  $\|A\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\| = \rho(A)\|\mathbf{v}\|$ , tehát  $\|A\| \geq \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \rho(A)$ .

4. Mutassuk meg, hogy ha  $A$  normális mátrix, akkor a 2-normája egyenlő a spektrálsugarával!

*Megoldás:* Legyen  $A$  normális mátrix, és  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  a sajátértékek abszolút értékei. Ekkor van olyan  $V$  unitér mátrix, amellyel  $V^{-1}AV = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Vegyük az  $U = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  unitér mátrixot, amelyre  $\varepsilon_i = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}, & \text{ha } \lambda_i \neq 0 \\ 1, & \text{ha } \lambda_i = 0. \end{cases}$

Ekkor  $A = VDV^* = (VU)\text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)V^*$  SVD felbontás, mert  $VU$  és  $V$  unitér, és a középső diagonális mátrix átlós elemei nemnegatív valós számok fogyó sorrendben. Így  $\|A\|_2 = \sigma_1 = |\lambda_1|$ .

5. Adjuk meg az  $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix legjobb 1 rangú közelítését a Frobenius-, 2-, 1- és  $\infty$ -norma szerint! (Az első kettőnél használjuk az Eckart–Young-tételt!.)

Megoldás: A Frobenius- és 2-normában való közelítéshez számítsuk ki az  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix SVD felbontását.

$A^*A = \begin{bmatrix} 29 & 14 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$ , és  $k_{A^*A}(x) = x^2 - 37x + 36 = (x - 36)(x - 1)$ .

$A^*A$  ortonormált saját párijai  $(36, \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1))$  és  $(1, \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2))$ . Ebből

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad AV = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből  $A = U\Sigma V^*$ , és  $A^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [6] \frac{1}{\sqrt{5}} [2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 24/5 & 12/5 \\ 12/5 & 6/5 \end{bmatrix}$ .

A közelítés hibája Frobenius- és 2-normában is 1.

Az 1-norma és a  $\infty$ -norma közül elég a  $\infty$ -normára megoldani a feladatot, ugyanis a mátrix szimmetrikus, ezért a  $\infty$ -normabeli legjobb közelítés transzponáltja adja az 1-normabeli legjobb közelítést.

1 hibájú közelítést könnyű találni:  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , tehát csak azt kell megnézni, hogy van-e ennél jobb. Mivel minden számot legfőljebb 1-gyel változtathatunk, a számok pozitívak maradnak, és a felső sorban az első elem marad a nagyobb. Tehát ahhoz, hogy a rang 1 legyen, azaz a  $B$  közelítő mátrixban  $b_{11}/b_{12} = b_{21}/b_{22}$  legyen, az alsó arányt növelni kell, a felsőt viszont csökkenteni, mivel  $|x| + |y| < 1$ -re

$$\frac{2+x}{2+y} \leq \frac{2+|x|}{2-|y|} = 1 + \frac{|x|+|y|}{2-|y|} < 2.$$

Az alsó arány növelése során gazdaságosabb csak a második elemet csökkenteni, ugyanis  $x \neq 0$ -ra

$$\frac{2+x}{2+y} \leq \frac{2+|x|}{2-|y|} < \frac{2}{2-|x|-|y|},$$

mert  $4 - |x|^2 - 2|y| - |x||y| < 4 - 2|y|$ , tehát az  $f(x) = \frac{2}{2-z}$  monoton növekvő függvény ( $[0, 1)$ -en) valamely  $z < |x| + |y|$ -ra veszi föl ugyanezt a  $\frac{2+x}{2+y}$  arányt.

Ugyanígy érdemes az első sort is csak a második elemben változtatni. Itt az arányt csökkenteni kell, és  $x \neq 0$ -ra

$$\frac{5+x}{2+y} \geq \frac{5-|x|}{2+|y|} > \frac{5}{2+|y|+|x|},$$

ugyanis  $3|x| - |x||y| - |x|^2 > 0$ , mert a feltevés szerint  $3 > 1 > |x| + |y|$ . Tehát az  $\frac{5}{2+z}$  monoton fogyó függvény a  $[0, 1)$ -en valamely  $z < |x| + |y|$ -re veszi föl ugyanazt az  $\frac{5+x}{2+y}$  arányt.

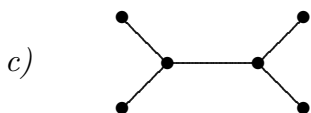
Végül azt kell megnéznünk, hogy  $0 \leq x, y \leq 1$ -re mi az  $x$  és  $y$  maximumának minimuma az  $\frac{5}{2+x} = \frac{2}{2-y}$ , azaz  $2x+5y=6$  feltétel mellett. Ezt a minimumot  $y=x$  esetén érjük el, így  $x=y=\frac{6}{7}$ . Tehát  $\infty$ -normában a legjobban közelítő  $\leq 1$  rangú mátrix  $\begin{bmatrix} 5 & 20/7 \\ 2 & 8/7 \end{bmatrix}$ , a közelítés hibája pedig  $6/7$ .

6. Bizonyítsuk be, hogy egy  $d$ -reguláris egyszerű irányítatlan gráf szomszédsági mátrixának spektrálsugara és 1-, 2 és  $\infty$ -normája is  $d$ .

Megoldás: Minden sorösszeg és oszlopösszeg  $d$ , így az 1- és  $\infty$ -norma is  $d$ . A 4. feladat szerint emiatt a spektrálsugár legfőljebb  $d$ , másrészt a csupa-1 vektor sajátvektor  $d$  sajátértékkel, így a spektrálsugár is  $d$ . Végül, mivel a mátrix szimmetrikus, így normális is, a spektrálsugara megegyezik a 2-normájával, tehát az utóbbi is  $d$ .

7. Mi a spektruma az alábbi gráfoknak? Az a) és b) feladatbeli gráfra keressük meg a sajátvektorokat is!

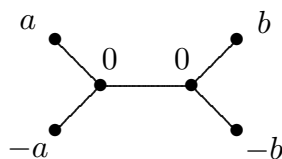
- a) 3, illetve 4 szögpontú teljes gráf  
b) 4 hosszú kör



Megoldás: a) Általánosan is könnyű megadni a  $K_n$  teljes gráf spektrumát. Ugyanis a gráf szomszédsági mátrixa  $J - I$ , ahol  $J$  a csupa-1 mátrix. Tudjuk, hogy  $J$ -nek a 0  $(n-1)$ -szeres sajátértéke (mivel  $r(J) = 1$ ), és még az  $n$  egy sajátérték, tehát  $K_n$  sajátértékei:  $-1$   $(n-1)$ -szeresen, és  $n-1$   $(1)$ -szeresen). Speciálisan  $n=3$ -ra  $-1, -1, 2$ , és  $n=4$ -re  $-1, -1, -1, 3$ . A  $K_n$   $(n-1)$ -hez tartozó sajátvektora az  $(1, 1, \dots, 1)$  vektor (és skalárszorosai). A  $-1$ -hez tartozó sajátalteret kigenerálják az  $(1, -1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, -1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, \dots, 0, 1, -1)$  vektorok (a 0-kban  $1 + (-1) + 0 + \dots + 0 = 0$  a szomszédok értékeinek összege, az 1 értékű csúcsban  $-1$ , a  $-1$  értékűben pedig 1).

- b) Mivel minden csúcs két szomszédja két átellenes (egy átló két végpontján levő) csúcs, 0-hoz csak az a vektor lehet sajátvektor, ahol az átellenes csúcsok értéke egymás negatívja, azaz (a négyszögön körbejárva) az  $(a, b, -a, -b)$  alakú vektorok. Ezek egy 2-dimenziós sajátalteret generálnak. Mivel a gráf 2-reguláris, spektrálsugara 2, és ehhez tartozó sajátvektor  $(1, 1, 1, 1)$ , továbbá mivel páros gráf (vagy mert a mátrixának a nyoma 0), a  $-2$  is sajátérték, ehhez tartozik az  $(1, -1, 1, -1)$  vektor. A spektrum ezek szerint  $0, 0, 2, -2$ .

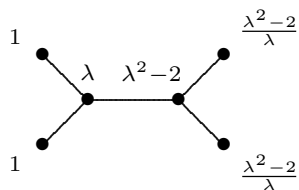
- c) Írjuk fel a gráfra, hogy a  $\lambda = 0$  és a  $\lambda \neq 0$  sajátértékekhez milyen sajátvektor tartozhat.  $\lambda = 0$  esetén a két középső csúcsban 0-nak kell lennie, mert a leveleken a szomszédok értékeinek összege 0. A középső csúcsokban is 0 kell, hogy legyen a szomszédok értékeinek összege, ezért az egy oldalon levő két csúcson az értékek egymás negatívjai.



Tehát a 0-hoz tartozó sajátalter 2-dimenziós, és az  $(1, -1, 0, 0, 0, 0)$  és  $(0, 0, 0, 0, 1, -1)$  vektorok generálják.

Most tekintsünk egy  $\lambda \neq 0$  sajátértéket. Ha valamelyik levélen 0 lenne, akkor könnyen látható, hogy minden csúcsban 0 állna, tehát nem kapnánk sajátvektort. Így feltehető,

hogy az egyik levélen 1 áll. Ekkor a szomszédján  $\lambda$ , annak a másik levelén is 1, a másik középsőn  $\lambda^2 - 2$ , végül a maradék két levélen  $\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}$ .



A jobb oldali középső csúcs miatt  $\lambda^3 - 2\lambda = \lambda + 2 \cdot \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda}$ , azaz  $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ , amiből a másik négy sajátérték  $\pm 1, \pm 2$ . (A sajátvektorok is könnyen leolvashatók, ha az ábrán behelyettesítjük  $\lambda$ -ba a konkrét értékeket).