

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 2

1. vizsga – elmélet

2024-06-05

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyításos részre 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshöz tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I/H)! (6 pont)

- a) Ha egy V vektortér valamely bázisából elhagyunk egy elemet, akkor amit kapunk, nem lehet generátorrendszere V -nek. ☐
- b) Ha $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, akkor vagy f képtere, vagy f magtere legalább kétdimenziós. ☐
- c) Ha φ komplex bilineáris (azaz szeszkvilineáris) függvény, akkor $\varphi(i\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, -i\mathbf{y})$. ☐
- d) Minden valós mátrix ortogonálisan hasonló egy háromszögmátrixhoz. ☐
- e) Ha egy 2×2 -es valós szimmetrikus mátrix indefinit, akkor invertálható is. ☐
- f) Ha A spektrálsugara 1, akkor az A^k ($k \in \mathbb{N}$) mátrixsorozat konvergens. ☐

2. Adjunk felső becslést $x + 2y - 2z$ abszolút értékére a CSB-egyenlőtlenség alapján, ha az $x, y, z \in \mathbb{R}$ számokra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

3. Hány olyan $\mathbf{v}$ vektor van $\mathbb{R}^4$ -ben, amellyel egy adott $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ortonormált rendszert ortonormált bázissá egészíthetünk ki? (2 pont)

4. Adjunk meg egy párosítást az alábbi betűk és számok között úgy, hogy az $\mathbb{R}^2$ betűvel jelölt típusú lineáris transzformációinak a standard mátrixa mindenképpen kielégítse a hozzárendelt számhoz tartozó tulajdonságot!

- A: altérre való vetítés 1: ortogonális
 B: merőleges vetítés 2: egyenlő önmaga négyzetével
 C: forgatás 3: szimmetrikus

(2 pont)

5. Adjunk meg két különböző, mátrixot, amelyek hasonlóak az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixhoz, de egyik sem egyenlő vele. (2 pont)

6. Hány negatív valós gyöke lehet a $p(x) = ax^5 - bx^4 + cx^3 - dx^2 + e$ valós polinomnak, ha a, b, c, d, e pozitívak?

7. Mi lehet az A mátrix minimálpolinomja, ha A nem diagonalizálható, és a karakterisztikus polinomja $k(x) = x^3(x+2)$?

8. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, és $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Mi az A mátrix Frobenius- és 2-normája? (2 pont)

9. Definiáljuk egy λ sajátérték algebrai és geometriai multiplicitását!

(2 pont)

10. Mondjuk ki pontos feltételekkel azt a tételt, amely egy mátrix minimálpolinomjának $m(x) = f(x)g(x)$ felbontásához tartozó blokkdiagonális alakról szól!

(3 pont)

11. Adjunk két ekvivalens feltételt arra (a definíciót is beleértve), hogy egy V vektortér az U_i ($i \in I$) altereknek direkt összege!

(3 pont)

12. Milyen feltételek mellett lesz egy szeszkvilineáris $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bilineáris függvény hermitikus skalárszorzat?

(2 pont)

13. Bizonyítsuk be, hogy a sajátalterek összege direkt összeg!

(6 pont)

14. Bizonyítsuk be, hogy minden valós pozitív szemidefinit mátrixnak van pozitív szemidefinit négyzetgyöke!

(4 pont)