

E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 2

1. vizsga – gyakorlat

2024-06-05

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. A nyolcpontos feladatok megoldását részletesen írjuk le, külön lapon. Kidolgozási idő 110 perc.

E1. Mi a nyoma és a determinánsa annak a 3×3 -as valós mátrixnak, amelynek 1 és $2 + i$ is sajátértéke?

E2. Ha $A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot P_2$ spektrálfelbontás, akkor mi a P_2 és az A ?

E3. Mi az $\mathbf{u} = (1, -i, 1 + i)$ és $\mathbf{v} = (0, i, -1)$ vektorok $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ skalárszorzata és távolsága $\mathbb{C}^3$ -ben?

E4. Az $x^2 + 2xy + 5y^2 + x - 2y - 5 = 0$ kúpszelet ellipszis, hiperbola vagy parabola? (Csak a típusa érdekes, a pontos alakja és elhelyezkedése nem.)

E5. Milyen $a, b \in \mathbb{C}$ -re ferdén önadjungált az $A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ 1-i & bi \end{bmatrix}$ mátrix?

E6. Milyen legjobb korlátot tudunk adni az A mátrix spektrálsugarára a Gersgorin-körök alapján?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E7. Mi egy $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó 4×4 -es Jordan-blokk n -edik hatványában az első sor utolsó eleme?

E8. Milyen alakban írható az $x_n = -x_{n-1} + 6x_{n-2}$ rekurzív sorozat n -edik tagja?

1. Legyen $\mathcal{B} = \{(2, 1), (5, 3)\}$ az $\mathbb{R}^2$ egy bázisa, és

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az $f: \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lineáris transzformáció és a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban!

2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix hasonló egy valós diagonális mátrixhoz, de ortogonálisan nem hasonló hozzá!

3. Givens-forgatásokkal határozzuk meg az alábbi A mátrix QR -felbontásában az R felső háromszögmátrixot (Q -t nem kell kiszámolni).

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Tekintsük a $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 2yz$ kvadratikus alakot. Írjuk fel a kvadratikus alak A mátrixát, hozzuk diagonális alakra, és állapítsuk meg a jellegét. Adjuk meg az ehhez a diagonális alakhoz tartozó bázist is!

5. Adjuk meg az A mátrix redukált SVD-felbontását, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Adjunk meg ortonormált bázist az $\mathbb{R}^4$ tér $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$ és $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 3, 1)$ vektorok által kifeszített W alterében, és ennek segítségével számítsuk ki a $(0, 0, 0, 3)$ vektor merőleges vetületét az altérre!

7. Írjuk fel az alábbi mátrix Jordan-normálalakját, és egy Jordan-bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Mennyi a rangja az alábbi gráf szomszédsági mátrixának? Határozzuk meg a gráf spektrumát!

