

1. Hány 6-odrendű részcsoportha van az $S_3 \times C_6$ direkt szorzatnak?
2. Írjuk fel az összes 12-edrendű csoportot ciklikus csoportok direkt vagy szemidirekt szorzataként, minél kevesebb komponenssel!
3. Bizonyítsuk be, hogy egy 120-adrendű csoport nem lehet egyszerű!
4. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \triangleleft G$ és $N \cap G' = 1$, akkor $N \leq Z(G)$.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha $|G| = p_1 p_2 \cdots p_r$, ahol $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ prímelek, akkor G p_1 -Sylow-részcsoportha normálosztó. (Felhasználhatjuk, hogy G feloldható.)
6. Bizonyítsuk be, hogy az $F(x, y)$ két elem által generált szabad csoportban az $S := \{x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2, y^{-3}xy^3, \dots\}$ halmaz szabadon generálja a $\langle Z \rangle$ részcsoporthot.
7. Bizonyítsuk be, hogy $S_n = \langle (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n) \rangle$, és adjuk meg S_n -et olyan relációkkal generált csoportként, amelyben a generátorelemek az előbb felsorolt generátorelemeknek felelnek meg!
- 8*. Bizonyítsuk be, hogy $\langle a, b, c \mid b^{-1}ab = a^2, c^{-1}bc = b^2, a^{-1}ca = c^2 \rangle$.
9. Legyen G véges csoport. Bizonyítsuk be, hogy $\text{Aut}(G)$ akkor és csak akkor primitív $G \setminus \{1\}$ -en, ha G elemi Abel 2-csoport vagy $|G| = 3$.
- 10*. Legyen $G \leq S_n$, G k -tranzitív, és $3 < k < n$. Bizonyítsuk be, hogy G minden nem triviális normálosztója $(k-1)$ -tranzitív!
11. Legyen R egységelemes gyűrű, és legyen $N \leq R$ nilpotens részgyűrű, azaz van olyan s , amelyre $N^s = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\{1+x \mid x \in N\}$ nilpotens csoport a gyűrűbeli szorzásra nézve!
12. Legyen $H \leq S_n$. Bizonyítsuk be, hogy ha H nilpotens és primitív, akkor $n = p$ prím, és H p -csoport.