Csoportelmélet feladatok/II. *Beadandó: 2000. nov.13-ra*

1. Hány 6 elemű részcsoportja van az $S_3 \times C_6$ csoportnak? (Útmutatás: Számoljuk össze a $\varphi : H_1/N_1 \to H_2/N_2$ izomorfizmusokat, ahol $N_1 \triangleleft H_1 \leq S_3$ és $N_2 \triangleleft H_2 \leq C_6$, továbbá a φ grafikonjának elemszáma $|H_1 : N_1| \cdot |N_1| \cdot |N_2| = 6$.)

2. Izomorfia erejéig hány olyan 60-adrendű csoport van, amely nemtriviális módon szemidirekt szorzatként állítható elő? (Útmutatás: Ha nem GAP-pel oldjuk meg:
- a) Lássuk be, hogy ha $|G| = 60$, és G nem egyszerű, akkor G valamelyik Sylow-részcsoportja normálosztó.
- b) Ha a 2-Sylow vagy 3-Sylow normálosztó, akkor az 5-Sylow is.
- c) Ha valamelyik Sylow-részcsoport normálosztó, akkor a Schur-Zassenhaus-tétel miatt a csoport szemidirekt szorzat.
- d) Számoljuk össze ezeket aszerint, hogy melyik Sylowok normálosztók.)

3. (gy) Adjuk meg S_5 azon részcsoportjainak izomorfiatípusát, amelyeket két másodrendű elem generál. (Lehet GAP-pel is.)

4. (gy) $N \operatorname{char} G$, ha N-et a G minden automorfizmusa önmagába viszi. Bizonyítsuk be, hogy
- a) $G' \operatorname{char} G$;
- b) $M \operatorname{char} N \triangleleft G \Rightarrow M \triangleleft G$;
- c) $G^{(i)} \triangleleft G$.

5. (gy) Legyen G a kvaterniócsoportnak C_3-mal vett szemidirekt szorzata, ahol a $C_3 = \langle a \rangle$ csoport generátorelemével való hatás: $i^a = j$, $j^a = k$, $k^a = i$. Adjuk meg G kommutátorláncát.

6. (gy) Lássuk be, hogy egy G véges csoport akkor és csak akkor nem feloldható, ha valamelyik szelete (részcsoportjának faktorcsoportja) nem-kommutatív egyszerű csoport.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha G feloldható, és $|G| = p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$, akkor G p_r-Sylowja normálosztó. (Útmutatás: használjunk r-re vonatkozó teljes indukciót.)

8. Mutassuk meg, hogy ha $|G'| = n > 1$, akkor G-nek van legföljebb n indexű valódi részcsoportja. (Útmutatás: Lássuk be, hogy G tetszőleges konjugáltosztálya legföljebb n elemű.)

9. (gy) Bizonyítsuk be, hogy egy véges nilpotens csoport minden részcsoportja nilpotens.

10. Legyen G a K véges test fölötti $n \times n$-es invertálható fölső háromszögmátrixok csoportja. Mekkora G rendje, ha $|K| = q$? Feloldható-e, nilpotens-e a G csoport?