Csoportelmélet feladatok/III. *2000. december*

1. Egy G csoport ferde kommutátorláncát a $K_0 = G$, $K_{i+1} = [K_i, G]$ rekurzióval definiáljuk. Bizonyítsuk be, hogy G pontosan akkor nilpotens, ha van olyan r, amire $K_r = 1$.

2. Adjuk meg S_4-nek egy 3-dimenziós valós irreducibilis reprezentációját, és határozzuk meg ennek a reprezentációnak a karakterét.

3. Legyen G az $\langle a\rangle \cong C_3$ és $\langle b\rangle \cong C_4$ csoportok szemidirekt szorzata, a $b^{-1}ab = a^{-1}$ hatással. Írjuk föl G karaktertábláját.

4. Egy papirusztekercsen egy táblázatot találtak, amiről feltételezik, hogy egy véges csoport karaktertáblája. Sajnos, néhány helyen már nem olvasható a szám. Egészítsük ki a táblázatot (vegyük figyelembe, hogy a sorok és oszlopok esetleg nem a megszokott sorrendben vannak, tehát az 1 elemhez tartozó oszlop nem feltétlenül az első, és a triviális karakter nem feltétlenül az első sorba került)! Mekkora a csoport rendje, konjugáltosztályainak mérete, milyen rendű normálosztói vannak? Mekkora a csoport centruma? Hány olyan csoport van, aminek ez a karaktertáblája?

1		1		-1	
1		1	-1		
	2	-1	-1	0	0
1		1	-1	-1	1
2	-2	-1	1		

5. Bizonyítsuk be, hogy egy irreducibilis karakternek és egy lineáris karakternek a szorzata mindig irreducibilis.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy nemtriviális csoport karaktertáblájának minden sorában és minden oszlopában legalább két nemnulla szám van.