1. *Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban az egymással konjugált elemek rendje megegyezik.*

Megoldás: $(g^{-1}ag)^n = g^{-1}a^n g$, így $a^n = 1 \Leftrightarrow (g^{-1}ag)^n = 1$, tehát $|a| = |g^{-1}ag|$.

2. *Adjunk példát olyan G csoportra, és g, h elemekre, ahol $|g| = |h|$, de g és h nem konjugáltak. ($|\ |$ az elem rendjét jelöli)*

Megoldás: S_4-ben $|(12)| = |(12)(34)|$, de ezek nem konjugált elemek, mert a ciklusszerkezetük különböző. Vagy még egyszerűbb: C_3-ban a két harmadrendű elem nyilván nem konjugált egymással, mert Abel-csoportban minden elem csak önmagával konjugált.

3. *Bizonyítsuk be, hogy $a, b \in G$-re $|ab| = |ba|$.*

Megoldás: $ba = a^{-1}(ab)a$, tehát ab és ba konjugáltak, így az 1. feladat szerint megegyezik a rendjük.

4. *Adjuk meg olyan a és b másodrendű egybevágóságait a síknak, amelyekre $|ab| = 1, 2, 3, 300$, illetve ∞.*

Megoldás: Ha a és b két, az origón átmenő, egymással φ szöget bezáró tengelyre való tükrözés, akkor ab az origo körüli 2φ szögű elforgatás. Tehát ahhoz, hogy $|ab| = n$ legyen, a $2\varphi = 2\pi/n$, azaz $\varphi = \pi/n$ választás megfelelő. A ∞ rendhez pedig π irracionális többszöröse jó.

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha $g^2 = 1\ \forall g \in G$, akkor G Abel.*

Megoldás: Minden $x, y \in G$-re $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, és $(xy)(xy) = 1$. Az $1 = xyxy$ egyenlőséget két oldalról x-szel, illetve y-nal beszorozva: $xy = x^2yxy^2 = yx$ teljesül minden $x, y \in G$-re, tehát G Abel.

6. *Lássuk be, hogy ha G-nek generátorrendszere az $X \subseteq G$ részhalmaz, és $xy = yx\ \forall x, y \in X$, akkor G Abel.*

Megoldás: Ha X generátorrendszere G-nek, akkor G minden eleme $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_r^{\varepsilon_r}$ alakban írható, ahol $\varepsilon_i = \pm 1\quad i = 1, \ldots, n$-re. Tehát elég belátni, hogy ha a fölcserélhető b-vel és c-vel, akkor b^{-1}-zel és bc-vel is: $ab = ba \Rightarrow b^{-1}ab = a \Rightarrow b^{-1}a = ab^{-1}$; illetve $ab = ba,\ ac = ca \Rightarrow abc = bac = bca$.

7. *Mutassuk meg, hogy $Gg = G$ minden $g \in G$-re.*

Megoldás: $Gg \subseteq G$ nyilvánvaló, másrészt tetszőleges $x \in G$-re $x = (xg^{-1})g \in Gg$, tehát $G \subseteq Gg$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy $H \leq G$-re H akkor és csak akkor normálosztó, ha G néhány konjugáltosztályának az uniója.*

Megoldás: $H \triangleleft G \Leftrightarrow$ minden $h \in H$-ra és $g \in G$-re $h^g \in H \Leftrightarrow$ minden h elemmel együtt a h teljes konjugáltosztálya is része H-nak.

9. *Lássuk be, hogy ha $H \leq G$, akkor $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ a G csoport H-ban levő legnagyobb normálosztója.*

Megoldás: $N^y = \bigcap_{g \in G} y^{-1}g^{-1}Hgy = \bigcap_{u \in Gy} u^{-1}Hu = N$, mert $Gy = G$ (v.ö. 7. feladat). Másrészt, ha $M \triangleleft G$ és $M \leq H$, akkor $M = M^g \leq H^g$ minden $g \in G$-re, így $M \leq \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg = N$.

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha $H \leq G$ és $|G : H| = 2$, akkor $H \triangleleft G$.*

Megoldás: Ha $|G : H| = 2$, akkor minden $g \in G \setminus H$-ra $Hg = gH = G \setminus H$ a H egyetlen önmagától különböző jobb illetve bal oldali mellékosztálya. Így $g^{-1}Hg = H$ minden $g \in G \setminus H$-ra, míg $h^{-1}Hh = H$ nyilvánvalóan teljesül minden $h \in H$-ra.

11. *Bizonyítsuk be, hogy minden p^2 rendű csoport Abel. (p prím)*

Megoldás: Legyen $|G| = p^2$. Tudjuk, hogy $Z(g) \neq 1$. Ha $Z(G) = G$, akkor G Abel. Különben $|Z(G)| = p$ és $Z(G) \triangleleft G$, így $|G/Z(G)| = p$, tehát $Z(G)$ és $G/Z(G)$ is ciklikus. Legyen $Z(G) = \langle a \rangle$ és $G/Z(G) = \langle \bar{b} \rangle$ ($b \in G \setminus Z(G)$), ekkor $G = \langle a, b \rangle$. Mivel $a \in Z(G)$, a és b fölcserélhetők, tehát a 6. feladat szerint G Abel.

12. *Bizonyítsuk be, hogy ha $|G| = 100$, akkor G 5-Sylow részcsoportja normálosztó.*

Megoldás: Legyen $P \in Syl_5(G)$. Ekkor az 5-Sylow részcsoportok száma G-ben $|G : N_G(P)|$, tehát osztója $|G : P| = 4$-nek, másrészt, kongruens 1-gyel modulo 5, így egyetlen 5-Sylow részcsoport van. Minthogy ennek a konjugáltjai is ugyanolyan rendűek, tehát 5-Sylowok, $P \triangleleft G$.

13. *Mutassuk meg, hogy ha $|G| = 51$, akkor G Abel.*

Megoldás: Ha $P \in Syl_3(G)$ és $Q \in Syl_{17}(G)$, akkor a 12. feladat gondolatmenete szerint P és Q is normálosztó G-ben (ui. 17-nek 1 az egyetlen olyan osztója, aminek a 3-mal vett maradéka 1, és 3-nak 1 az egyetlen olyan osztója, aminek a 17-tel vett maradéka 1). Nyilván $P \cap Q = 1$, mert rendje P és Q rendjét is osztja, és így $|PQ| = 3 \cdot 17 = |G|$, tehát $PQ = G$. Következésképpen $G = P \times Q \cong C_3 \times C_{17}$ Abel.

14. *Bizonyítsuk be, hogy nincs 30 rendű egyszerű csoport.*

Megoldás: Az 5-Sylowok száma 1 vagy 6 lehet. Ha 1, akkor az 5-Sylow részcsoport normálosztó. Ha 6, akkor (minthogy különböző, prímrendű részcsoportok metszete szükségképpen triviális) G-ben $6 \cdot 4 = 24$ 5-ödrendű elem van. Így a maradék 6 tartalmazza az összes harmadrendű elemet (nem beszélve az egyéb rendekről), tehát nem lehet 3-nál több 3-Sylow részcsoport, de ezek száma konguens 1-gyel modulo 3, így egyetlen 3-Sylow van, vagyis ilyenkor a 3-Sylow részcsoport normálosztó.

15. *Hány nem izomorf 99 rendű csoport van?*

Megoldás: A 13. feladat megoldásában mutatott gondolatmenet alapján G-ben a 3-Sylow részcsoport és a 11-Sylow részcsoport is normálosztó, s így $G \cong P \times Q$, ahol $P \in Syl_3(G)$ és $Q \in Syl_{11}(G)$. $|Q| = 11$ miatt $Q \cong C_{11}$, és a 11. feladat szerint a 9-edrendű P részcsoport is Abel, így az alaptétel szerint csak a $P \cong C_9$ vagy $P \cong C_3 \times C_3$ esetek lehetségesek. Tehát izomorfia erejéig két 99 rendű csoport van.

16. *Lássuk be, hogy a szemidirekt szorzat külső konstrukciójában ($\varphi : H \to \operatorname{Aut} N$-re $G := \{(n, h) \,|\, n \in N,\ h \in H\}$, $(n, h) \cdot (n', h') = (nn'^{h^{-1}\varphi}, hh')$) a kapott G csoport valóban egy N-nel izomorf N_1 normálosztó, és egy H-val izomorf H_1 részcsoport szemidirekt szorzata, ahol H_1 hatása a konjugálással az N_1-en megfelel φ-nek.*

Megoldás: $N_1 = \{(n, 1) \,|\, n \in N\}$ és $H_1 = \{(1, h) \,|\, h \in H\}$. Mivel $(n, 1)(n', 1) = (nn'^{1\varphi}, 1) = (nn', 1)$, és $(1, h)(1, h') = (1, hh')$, látjuk, hogy $H_1, N_1 \leq G$, továbbá $N_1 \cong N$ és $H_1 \cong H$. Minthogy $G = N_1H_1$ nyilvánvaló, és $N_1 \leq N_G(N_1)$, az N_1 normálosztó voltához elég belátni, hogy $H_1 \leq N_G(N_1)$. $(1, h^{-1})(n, 1)(1, h) = (n^{h\varphi}, h^{-1})(1, h) = (n^{h\varphi}, 1) \in N_1$ mutatja, hogy $N_1 \lhd G$, és egyúttal azt is, hogy H_1 valóban az előre megadott hatással hat N_1-en.

17. *Hányadrendű lehet két 3-ciklus szorzata S_n-ben?*

Megoldás: Ha ugyanazokat az elemeket mozgatják: $(abc)(abc) = (cba)$ rendje 3, illetve $(abc)(cba) = 1$ rendje 1. Ha két közös elemet mozgatnak: $(abc)(abd) = (ad)(bc)$ rendje 2, illetve $(abc)(bad) = (bcd)$ rendje 3. Ha egy közös elemet mozgatnak: $(abc)(ade) = (abcde)$ rendje 5. Ha nincs közös elem a két ciklusban:$(abc)(def)$ rendje 3. Tehát $1, 2, 3, 5$ lehet a rendje, ha $n \geq 5$, S_4-ben csak 1, 2 és 3, S_3-ban csak 1 és 3.

18. *Mutassuk meg, hogy A_4-ben nincs 6-odrendű részcsoport.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $H \leq G = A_4$ és $|H| = 6$. Legyen $P \in Syl_3(H)$. Ekkor $|H : P| = 2$ a 10. feladat miatt azt adja, hogy $P \lhd H$, azaz $H \leq N_G(P)$, és P nyilván G-nek is 3-Sylow részcsoportja. De akkor $|G : N_G(P)| \leq 2$, tehát legföljebb két, sőt, a kongruencia feltétel miatt egyetlen 3-Sylowja van G-nek, holott 2-nél több (8 db) 3-adrendű eleme van A_4-nek. Tehát mégsem létezhet ilyen H részcsoport.

19. *Igazoljuk, hogy S_n-ben minden páratlan permutáció rendje páros.*

Megoldás: Mivel a páratlan hosszúságú ciklusok páros permutációt adnak, egy páratlan permutáció ciklusfelbontásában kell lennie páros hosszúságú ciklusnak. Ennek a rendje páros, így az egész permutációé is páros.

20. *Van-e olyan $x, y \in S_{2000}$, amelyre $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy = (12)$?*

Megoldás: Ha x-et és y-t (nem feltétlenül diszjunkt!) transzpozíciók szorzataként írjuk, x-ben és x^{-1}-ben, illetve y-ban és y^{-1}-ben ugyanannyi transzpozíció szerepel, így $[x, y]$ felírható páros sok transzpozíció szorzataként, következésképpen $[x, y]$ páros permutáció. Így nyilván nem lehet egyenlő a páratlan (12) permutációval.