1. *Hány 6 elemű részcsoportja van az $S_3 \times C_6$ csoportnak? (Útmutatás: Számoljuk össze a $\varphi : H_1/N_1 \to H_2/N_2$ izomorfizmusokat, ahol $N_1 \triangleleft H_1 \le S_3$ és $N_2 \triangleleft H_2 \le C_6$, továbbá a φ grafikonjának elemszáma $|H_1 : N_1| \cdot |N_1| \cdot |N_2| = 6$.)*

Megoldás: Az útmutatás szerinti izomorfizmusoknál jelölje i a $|H_1 : N_1| = |H_2 : N_2|$ indexet, n_i pedig az N_i rendjét ($i = 1,2$), és legyen P_3 az S_3 (egyetlen) 3-Sylowja, P_2 az S_3 tetszőleges 2-Sylowja, C_2 és C_3 a C_6 egyetlen 2, illetve 3 elemű részcsoportja. Az $S_3 \times C_6$ csoport 6 elemű részcsoportjait a következő izomorfizmusok írják le.
$i = 6$, $n_1 = n_2 = 1$: nincs, mert S_3 nem izomorf C_6-tal: **0**.
$i = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$: nincs, mert itt $H_1 = S_3$, és ennek nincs kételemű normálosztója: **0**.
$i = 3$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$: $H_1 = P_3$, $H_2 = C_6$, $N_2 = C_2$ egyértelmű, de két izomorfizmus van H_1/N_2-ből H_2/N_2-be: **2**.
$i = 2$, $n_1 = 3$, $n_2 = 1$: $H_1 = S_3$, $N_1 = P_3$, $H_2 = C_2$ egyértelmű, és az izomorfizmus is az: **1**.
$i = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$: $H_1 = P_2$ háromféle lehet, $H_2 = C_6$, $N_2 = C_3$ egyértelmű, és az izomorfizmus is az: **3**.
$i = 1$, $n_1 \cdot n_2 = 6$: $H_1 = N_1$, $H_2 = N_2$: S_3 minden részcsoportjához egyértelműen van kiegészítő rendű részcsoport C_6-ban: **6**.
Ez összesen $0 + 0 + 2 + 1 + 3 + 6 = 12$ részcsoport.

2. *Izomorfia erejéig hány olyan 60-adrendű csoport van, amely nemtriviális módon szemidirekt szorzatként állítható elő?*

Megoldás: GAP-pel a következő két sort gépeljük be:

```
ll:=AllSmallGroups(Size,60,IsSimple,false);;Size(ll);
ForAll(ll,x->IsNormal(SylowSubgroup(x,5),x));
```

Ez megmutatja, hogy összesen 12 csoport jöhet szóba (izomorfia erejéig), és mivel ezekben mindben normálosztó az 5-Sylow-részcsoport, a Schur–Zassenhaus-tétel miatt ezek valódi szemidirekt szorzatként állnak elő. A számítógép nélküli, hosszabb, de több információt adó megoldást majd külön lapon írom le.

3. *(gy) Adjuk meg S_5 azon részcsoportjainak izomorfiatípusát, amelyeket két másodrendű elem generál.*

Megoldás: Feltehetjük, hogy vagy (12) az egyik generátorelem, és a másik ((..) vagy (..)(..) alakút aszerint nézzük, hogy az 1-et és a 2-t hogyan mozgatják, vagy az első generátorelem (12)(34), és a másik is (..)(..) alakú. Így a következő eseteket kell számításba venni:
$G_1 = \langle (12), (13) \rangle$, $G_2 = \langle (12), (34) \rangle$, $G_3 = \langle (12), (12)(34) \rangle$, $G_4 = \langle (12), (13)(24) \rangle$, $G_5 = \langle (12), (13)(45) \rangle$, $G_6 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$, $G_7 = \langle (12)(34), (12)(35) \rangle$, $G_8 = \langle (12)(34), (13)(25) \rangle$, és az összes többi ezeknek konjugáltja, tehát valamelyikkel izomorf. Jelölje g_i és h_i a G_i csoport fönt megadott két generátorelemét.
$G_1 = \langle (12), (13) \rangle = \Big\langle (12), (13), g_1^{h_1} = (23) \Big\rangle \cong S_3$.
$G_2 = \langle (12), (34) \rangle = \langle (12) \rangle \times \langle (34) \rangle = C_2 \times C_2$.
$G_3 = \langle (12), (12)(34) \rangle = \langle (12), (12)(34), g_3 h_3 = (34) \rangle = \langle (12), (34) \rangle = G_2 \cong C_2 \times C_2$.
$G_4 = \langle (12), (13)(24) \rangle = \langle g_4 = (12), g_4 h_4 = (1423) \rangle \cong D_4$ diédercsoport, ui. $(1423)^{(12)} = (2413) = (1423)^{-1}$.
$G_5 = \langle (12), (13)(45) \rangle = \Big\langle (12), g_5^{h_5} = (23), (13)(45) \Big\rangle = \big\langle S_{\{1,2,3\}}, (13)(45) \big\rangle = \big\langle S_{\{1,2,3\}}, (45) \big\rangle = S_{\{1,2,3\}} \times \langle (45) \rangle \cong S_3 \times C_2$.
$G_6 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle \cong C_2 \times C_2$, ui. $g_6 h_6 = h_6 g_6 \big(= (14)(24) \big)$.
$G_7 = \langle (12)(34), (12)(35) \rangle = \langle g_7 = (12)(34), g_7 h_7 = (345) \rangle \cong D_3 \cong S_3$, ui. $(345)^{(12)(34)} = (435) = (345)^{-1}$.
$G_8 = \langle (12)(34), (13)(25) \rangle = \langle g_8, g_8 h_8 = (15234) \rangle \cong D_5$, ui. $(15234)^{(12)(34)} = (25143) = (15234)^{-1}$.
Tehát az S_5 két másodrendű elemmel generált részcsoportjai a következő öt csoport egyikével izomorfak: $C_2 \times C_2$, S_3, D_4, D_5 és $S_3 \times C_2$.

4. *(gy) $N \operatorname{char} G$, ha N-et a G minden automorfizmusa önmagába viszi. Bizonyítsuk be, hogy*
a) $G' \operatorname{char} G$;
b) $M \operatorname{char} N \triangleleft G \Rightarrow M \triangleleft G$;
c) $G^{(i)} \triangleleft G$.

Megoldás: a) Ha $\alpha \in \operatorname{Aut} G$, akkor $[x,y]^\alpha = [x^\alpha, y^\alpha] \in G'$, így $G'^{\alpha} \le G'$.
b) Minden $g \in G$-re a g-vel való konjugálás automorfizmusa az N normálosztónak, így M-et önmagába viszi.
c) i-re vonatkozó indukcióval: $i = 1$-re tudjuk, és ha i-re igaz, akkor $G^{(i+1)} = \big(G^{(i)}\big)' \operatorname{char} G^{(i)}$ az a) rész szerint, és akkor a b) részből következik, hogy $G^{(i+1)} \triangleleft G$. (Mellesleg, $G^{(i)} \operatorname{char} G$ is világos.)

5. *(gy) Legyen G a kvaterniócsoportnak C_3-mal vett szemidirekt szorzata, ahol a $C_3 = \langle a \rangle$ csoport generátorelemével való hatás: $i^a = j$, $j^a = k$, $k^a = i$. Adjuk meg G kommutátorláncát.*

Megoldás: Legyen N a G csoportnak a kvaterniócsoporttal izomorf normálosztója. Ekkor $G' = N$, ui. $G/G' \cong C_3$ Abel, tehát $G' \leq N$, másrészt az N generátorelemei előállnak kommutátorként: $a^{-1}j^{-1}aj = -kj = i$ és $a^{-1}k^{-1}ak = -ik = j$, így $N \leq G'$. Az N centruma $Z(N) = \{\pm 1\}$ 2-elemű normálosztó, és $N/Z(N) \cong C_2 \times C_2$ Abel, tehát $N' \leq Z(N)$, másrészt N' nyilván nem 1, mert N nem Abel. Így $N' = Z(N)$. Ebből azt kaptuk, hogy a G csoport kommutátorlánca: $G > N > Z(N) > 1$, ahol a faktorok C_3, $C_2 \times C_2$, illetve C_2.

6. *(gy) Lássuk be, hogy egy G véges csoport akkor és csak akkor nem feloldható, ha valamelyik szelete (részcsoportjának faktorcsoportja) nem-kommutatív egyszerű csoport.*

Megoldás: $\Leftarrow$: A nem-kommutatív egyszerű csoportok nyilván nem feloldhatóak (a kommutátorlánc „el sem indul"), márpedig a feloldhatóság öröklődik részcsoportra és faktorra, tehát ha egy csoportnak van nem feloldható szelete, akkor ő maga sem feloldható.
$\Rightarrow$: Vegyük G-nek egy tovább nem finomítható normálláncát. Ennek faktorai mind egyszerűek (mert különben tovább finomíthatnánk), és kell köztük nem-kommutatív faktornak lennie, mivel G nem feloldható. Ez a faktor a keresett szelet.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha G feloldható, és $|G| = p_1 p_2 \dots p_r$, ahol $p_1 < p_2 < \dots < p_r$, akkor G p_r-Sylowja normálosztó.*

Megoldás: Egy feloldható csoportnak mindig van prímhatványrendű normálosztója (a kommutátorlánc legalsó nemtriviális tagjának Sylow-részcsoportja karakterisztikus ebben a normálosztóban, így normálosztó az egész csoportban). Esetünkben ez egy prímrendű normálosztó: N. Ha $|N| = p_r$, akkor készen vagyunk. Ha $|N| = p_i < p_r$, akkor G/N-re indukciót alkalmazva azt kapjuk, hogy van egy $N \leq M \lhd G$, amire $|M/N| = p_r$, azaz $|M| = p_i p_r$. Nyilvánvaló, hogy M-ben csak egy p_r-Sylow van (mert a p_r-Sylowok száma $\equiv 1$ (p_r), és osztója p_i-nek), tehát ez karakterisztikus részcsoport M-ben, s így normálosztó G-ben.

8. *Mutassuk meg, hogy ha $|G'| = n > 1$, akkor G-nek van legföljebb n indexű valódi részcsoportja.*

Megoldás: A $|G'| > 1$ feltételből következik, hogy G nem Abel. Legyen $g \in G$ tetszőleges nem centrumbeli elem. Ekkor az $\{[x, g^{-1}] \mid x \in G\} \subseteq G'$ halmaz legföljebb n elemű. Másrészt ha $[x, g^{-1}] = [y, g^{-1}]$, akkor $g^x = g^y$, tehát g konjugáltosztálya is legföljebb n elemű, azaz $1 < |G : C_G(g)| \leq n$.

9. *(gy) Bizonyítsuk be, hogy egy véges nilpotens csoport minden részcsoportja nilpotens.*

Megoldás: Belátjuk, hogy ha G-nek minden Sylow-részcsoportja normálosztó (ami ekvivalens azzal, hogy G nilpotens), akkor G tetszőleges H részcsoportjára is igaz ez. Legyen $p \mid |H|$, és legyen $P \in Syl_p(G)$. A feltevés miatt $P \lhd G$. Az izomorfizmus-tétel következtében $|H : H \cap P| = |HP : P| \mid |G : P|$ relatív prím p-hez, és $|H \cap P| \mid |P|$ p-hatvány, tehát $H \cap P \in Syl_p(H)$, és $H \cap P$ nyilvánvalóan normálosztója H-nak, tehát H-nak minden Sylow-részcsoportja normálosztó.

10. *Legyen G a K véges test fölötti $n \times n$-es invertálható fölső háromszögmátrixok csoportja. Mekkora G rendje, ha $|K| = q$? Feloldható-e, nilpotens-e a G csoport?*

Megoldás: Ha $|K| = q = p^\alpha$, akkor minden átlóelemet $q-1$-féleképpen, az átló fölötti elemeket q-féleképpen választhatjuk, tehát $|G| = (q-1)^n \cdot q^{(n^2-n)/2}$.

Legyen N azoknak a mátrixoknak a halmaza G-ben, amelyeknek átlójában csupa 1 áll, H pedig a G-beli diagonális mátrixok halmaza. Nyilvánvaló, hogy $N \lhd G$, $H \leq G$, és H komplementuma N-nek. $|N| = q^{(n^2-n)/2}$ p-hatvány, és $G/N \cong H$ izomorf a K test multiplikatív csoportjának n-edik direkt hatványával, tehát G/N Abel-csoport. Ezért N és G/N is feloldható, így G is feloldható.

Belátjuk, hogy G akkor és csak akkor nilpotens, ha $|K| = 2$. Az elégségesség nyilvánvaló: a $|K| = 2$ esetben $|G| = 2^{(n^2-n)/2}$, és minden p-csoport nilpotens. Most tegyük fel, hogy G nilpotens. Ekkor $H \leq C_G(N)$, ugyanis $N \in Syl_p(G)$, és H-t a G -nek a p-től különböző prímekhez tartozó Sylow-részcsoportjai generálják. Viszont $i < j$ esetén $I + E_{ij} \in N$, és ha $A \in H$ diagonális mátrix $d_1, d_2, \dots, d_n$ diagonális elemekkel, akkor $(I + E_{ij})A = A + d_j E_{ij}$ és $A(I + E_{ij}) = A + d_i E_{ij}$ megegyezik, így $d_i = d_j$. Ebből következik, hogy H minden eleme skalármátrix, tehát $|K| = 2$.