1. *Egy G csoport ferde kommutátorláncát a $K_0 = G$, $K_{i+1} = [K_i, G]$ rekurzióval definiáljuk. Bizonyítsuk be, hogy G pontosan akkor nilpotens, ha van olyan r, amire $K_r = 1$.*

Megoldás: Először belátjuk, hogy ha a ferde kommutátorlánc leér, akkor a csoport nilpotens, ugyanis a ferde kommutátorlánc maga is egy centrális lánc. Könnyen látható, hogy bármely N normálosztóra az $[N, G]$ csoport is normálosztó, mert $[n, g]^h = [n^h, g^h]$, és így $K_i \triangleleft G$ minden i-re. Másrészt a $K_{i+1} = [K_i, G]$ definícióból azt kapjuk, hogy $[K_i/K_{i+1}, G/K_{i+1}] = \bar{1}$ a G/K_{i+1} faktorcsoportban, így $K_i/K_{i+1} \le Z(G/K_{i+1})$ teljesül minden i-re.

Most tegyük föl, hogy G nilpotens, és legyen $N_0 = 1 < N_1 < N_2 < \cdots < N_t = G$ egy centrális lánc. Megmutatjuk, hogy $K_i \le N_{t-i}$ minden i-re, amiből $K_t = 1$ következni fog. Az állítás nyilván igaz $i = 0$-ra, és ha i-re igaz, akkor $K_{i+1} = [K_i, G] \le [N_{t-i}, G]$, és $N_{t-i}/N_{t-i-1} \le Z(G/N_{t-i-1})$ miatt $[N_{t-i}/N_{t-i-1}, G/N_{t-i-1}] = \bar{1}$, amiből $[N_{t-i}, G] \le N_{t-i-1}$, bizonyítva, hogy $K_{i+1} \le N_{t-(i+1)}$.

2. *Adjuk meg S_4-nek egy 3-dimenziós valós irreducibilis reprezentációját, és határozzuk meg ennek a reprezentációnak a karakterét.*

Megoldás: S_4-et reprezentálhatjuk mint az origo középpontú szabályos tetraéder egybevágóságainak csoportját: a csúcsokon való hatás meghatározza a transzformációt, és az S_4-et generáló transzpozíciókat könnyen megvalósíthatjuk egy-egy síkra való tükrözés segítségével. Legyenek a tetraéder csúcspontjai $A(-1,-1,-1)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,-1,1)$, $D(-1,1,1)$ (egy origo középpontú kocka lapátlókkal összekötött négy csúcsa), és az ezekbe mutató helyvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$. Az egyes permutációkhoz tartozó transzformációk mátrixát legkényelmesebben az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban írhatjuk föl. Így az egyes konjugáltosztályok egy-egy reprezentáns elemére: $1 \mapsto I$, $(AB) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(ABC) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(ABCD) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $(AB)(CD) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Tehát a karakter értéke a megfelelő elemeken (konjugáltosztályokon): 3,1,0,-1,-1, és a karakter skaláris négyzete: $\frac{1}{24}(1 \cdot 9 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1$, így a megadott reprezentáció valóban irreducibilis.

3. *Legyen G az $\langle a \rangle \cong C_3$ és $\langle b \rangle \cong C_4$ csoportok szemidirekt szorzata, a $b^{-1}ab = a^{-1}$ hatással. Írjuk föl G karaktertábláját.*

Megoldás: Először keressük meg G konjugáltosztályait! Mivel $b^2 \in Z(G)$, az $\{1\}$-en kívül $\{b^2\}$ is egyelemű konjugáltosztály. $C_G(a) \ge \langle a, b^2 \rangle$, tehát $|C_G(a)| \ge 6$, és $a \notin Z(G)$, így a konjugáltosztálya 2-elemű: $\{a, a^{-1}\}$, és ennek a centrális b^2 elemmel való eltoltja is nyilvánvalóan konjugáltosztály: $\{ab^2, a^{-1}b^2\}$. Végül $C_G(b) \ge \langle b \rangle$, így $|C_G(b)| \ge 4$, és $\ne 12$, tehát b konjugáltosztálya 3-elemű: $\{b, b^a, b^{a^{-1}}\} = b, ab, a^{-1}b$, és a b^2-szerese: $\{b^{-1}, ab^{-1}, a^{-1}b^{-1}\}$. A $G/\langle a \rangle \cong C_4$ faktorcsoport karaktertáblája megadja a G karaktertáblájának négy sorát:

1	b^2	b	b^{-1}
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	i	$-i$
1	-1	$-i$	i

$\mapsto$

1	b^2	a, a^{-1}	$ab^2, a^{-1}b^2$	$b, ab, a^{-1}b$	$b^{-1}, ab^{-1}, a^{-1}b^{-1}$
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	i	$-i$
1	-1	1	-1	$-i$	i

Minthogy $b^2 \in Z(G)$, a $\langle b^4 \rangle$ részcsoport normálosztó G-ben, és a $G/\langle b^2 \rangle \cong S_3$ faktorcsoport karaktertáblája megadja a G karaktertáblájának három sorát:

1	$\bar{a}$	$\bar{b}$
1	1	1
1	1	-1
2	-1	0

$\mapsto$

1	b^2	a, a^{-1}	$ab^2, a^{-1}b^2$	$b, ab, a^{-1}b$	$b^{-1}, ab^{-1}, a^{-1}b^{-1}$
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1
2	2	-1	-1	0	0

A hiányzó hatodik sort vagy az ortogonalitási relációk segítségével vagy az 5. feladat állítása alapján, a harmadik és az ötödik karakter szorzataként kaphatjuk meg. Tehát G karaktertáblája:

1	b^2	a, a^{-1}	$ab^2, a^{-1}b^2$	$b, ab, a^{-1}b$	$b^{-1}, ab^{-1}, a^{-1}b^{-1}$
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	i	$-i$
1	-1	1	-1	$-i$	i
2	2	-1	-1	0	0
2	-2	-1	1	0	0

4. *Egy papirusztekercsen egy táblázatot találtak, amiről feltételezik, hogy egy véges csoport karaktertáblája. Sajnos, néhány helyen már nem olvasható a szám. Egészítsük ki a táblázatot (vegyük figyelembe, hogy a sorok és oszlopok esetleg nem a megszokott sorrendben vannak, tehát az 1 elemhez tartozó oszlop nem feltétlenül az első, és a triviális karakter nem feltétlenül az első sorba került)! Mekkora a csoport rendje, konjugáltosztályainak mérete, milyen rendű normálosztói vannak? Mekkora a csoport centruma? Hány olyan csoport van, aminek ez a karaktertáblája?*

Megoldás: A kiegészített karaktertábla (alá vannak húzva az eredetileg hiányzó számok):

1	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	-1	$\underline{-}1$
1	$\underline{-}1$	1	-1	$\underline{1}$	$\underline{-}1$
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
$\underline{2}$	2	-1	-1	0	0
1	$\underline{-}1$	1	-1	-1	1
2	-2	-1	1	$\underline{0}$	$\underline{0}$

A hiányzó számokat például a következő úton lehet meghatározni: a triviális karakter csak a harmadik sorban lehet, ugyanis az összes többi sorban van 1-től különböző elem, és a harmadik sor kitöltése után az oszlopvektorokat csupán a merőlegességük alapján meg lehet határozni. Ezután a kiszámolhatjuk a konjugáltosztályok méretét: a $\mathcal{K}(g)$-hez tartozó oszlop skaláris négyzete $|G| \,/\, |C_G(g)|$. Tehát a konjugáltosztályokat a táblázat sorrendjében $\mathcal{K}_i$-vel ($i = 1, 2, \ldots, 6$) jelölve, $|\mathcal{K}_1| = |\mathcal{K}_2| = 1$, $|\mathcal{K}_3| = |\mathcal{K}_4| = 2$ és $|\mathcal{K}_5| = |\mathcal{K}_6| = 3$. G rendje ebből 12, a centrum pedig az egyelemű konjugáltosztályok uniója: $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, kételemű. A normálosztók az irreducibilis karakterek magjai: $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_4$, $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3 \cup K_5$, G, $\mathcal{K}_1 \cup K_2$, $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_6$ és $\mathcal{K}_1$, és az ezekből kapott egyetlen új metszet: $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3$. Tehát a normálosztók rendje: 1, 2, 3, 6 (ebből három van), és 12. Minthogy G-ben van egy másodrendű és egy 6-odrendű diszjunkt normálosztó (amelyek a rendek miatt az egész G-t generálják), G ezeknek direkt szorzata. Ez a hatodrendű normálosztó nem lehet Abel, mert akkor G is az lenne (pedig $|Z(G)| = 2$), tehát csak S_3-mal lehet izomorf, így $G \cong C_2 \times S_3$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy irreducibilis karakternek és egy lineáris karakternek a szorzata mindig irreducibilis.*

Megoldás: Legyen χ irreducibilis, φ pedig lineáris karakter. Ekkor $[\chi\varphi, \chi\varphi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\varphi(g)\overline{\chi(g)\varphi(g)} = \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 \, |\varphi(g)|^2$. Mivel φ lineáris, $\varphi(g)$ egy komplex egységgyök, tehát $|\varphi(g)| = 1$. Másrészt a χ irreducibilitása miatt χ skaláris négyzete 1, így a $\chi\varphi$ skaláris négyzete tovább $= \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = 1$, amiből következik, hogy $\chi\varphi$ irreducibilis.

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy nemtriviális csoport karaktertáblájának minden sorában és minden oszlopában legalább két nemnulla szám van.*

Megoldás: A karaktertáblában van egy csupa pozitív egész számból álló sor (a triviális karakter sora), és egy csupa pozitív egészekből álló oszlop (az egységelem oszlopa). Tehát minden oszlopban és sorban van legalább egy nem-nulla elem. Az első oszlopban tehát egynél több nem-nulla elem van, és ha egy másik oszlopban csak egy nem-nulla elem volna, akkor az első oszloppal való skaláris szorzata nem lenne nulla, ami ellentmondana az ortogonalitási relációknak. Hasonlóan, ha egy, a triviális karaktertől különböző karakter sorában csak egy nulla lenne, akkor a triviális karakterrel való skaláris szorzata nem lenne nulla.