1. Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív! (Használjuk a kategóriaelméleti koszorzat és szorzat fogalmát!)

2. Bizonyítsuk be, hogy minden vektortér projektív és injektív!

3. Tekintsük a 2./6. feladat egyelemű $\mathcal{K} = \{\, a \,\}$ kategóriáját az $S = \mathrm{Hom}(a, a)$ félcsoporttal. Projektív-e, injektív-e az a objektum? Létezik-e az a és a objektumok szorzata?

4. Legyen $a \in R$, és tegyük fel, hogy az aR jobb R-modulus projektív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az a elem jobb annullátora is felírható bR alakban valamely $b \in R$-re!

5. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\mathbb{Q}$ mint Abel-csoport nem projektív;

b*) $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ nem projektív! (Útmutatás: Álljon a H részcsoport azokból az elemekből, amelyekre igaz, hogy tetszőleges n-re a komponensek véges sok kivétellel oszthatók 2^n-nel. Ekkor H kontinuum számosságú, de $H/2H$ megszámlálható, így H nem lehet szabad Abel-csoport.)

6. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_n$ injektív mint önmaga fölötti modulus (használhatjuk a Baer-kritériumot)!

Hf1. Injektív-e $\mathbb{Z}_2$ mint $\mathbb{Z}_4$-modulus, illetve $\mathbb{Z}_6$-modulus?

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy P modulus akkor és csak akkor projektív, ha van olyan szabad F modulus, melyre $F \cong F \oplus P$. (Útmutatás: gondoljunk a végtelen direkt összegekre is!)