1. Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját!

2. Hány dimenziós az 3.b) feladatban megadott A algebra fölött a $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix})$, illetve a $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix})$ vektortér?

3. A következők közül melyik definiál funktort a morfizmusokon való természetes hatással együtt?
a) $G \mapsto G'$ a csoportok kategóriájában;
b) $G \mapsto Z(G)$ a csoportok kategóriájában;
c) $A \mapsto t(A)$ az Abel-csoportok kategóriájában, ahol $t(A)$ az A torziórészcsoportja, azaz véges rendű elemeinek csoportja.

4. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathrm{Hom}_K(-, K)$ funktor (K-dualitás) egzakt kontravariáns funktor Mod-A-ból A-Mod-ba!

5. Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}.$$

Tekintsük a $0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ sorozatot, ahol mindegyik morfizmus a legnagyobb rangú olyan homomorfizmus (azaz a képe vektortérként maximális dimenziós), ami a Loewy-diagramokban használt báziselemeket báziselemekbe vagy 0-ba viszi. Határozzuk meg a sorozat homológiáit!

6. Legyen $\xi :\ 0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ sorozat mod-R-ben. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:
(i) ξ egzakt, és $\mathrm{Im}\,\alpha$ direkt összeadandó Y-ban (így $Y \cong X \oplus Z$);
(ii) ξ egzakt, és $\exists \alpha' : Y \to X$, hogy $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$;
(iii) ξ egzakt, és $\exists \beta' : Z \to Y$, hogy $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$;
(iv) $\exists \alpha : Y \to X$ és $\beta' : Z \to Y$, hogy $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$, $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$, $\alpha\beta = 0$, $\beta'\alpha' = 0$, és $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$.
Ilyenkor a ξ sorozatot *felhasadó* rövid egzakt sorozatnak hívjuk.

Hf1. Határozzuk meg az összes olyan α, β homomorfizmust, amelyre a $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és adjuk meg minden esetben a homológiákat!

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ féligegzakt sorozat akkor és csak akkor homotóp a csupa-0 sorozattal, ha felhasadó egzakt.