1. (5-lemma) Tegyük fel, hogy a következő kommutatív diagram sorai egzaktak.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E' \end{array}$$

Mutassuk meg, hogy

a) ha α epimorfizmus, és β és δ monomorfizmusok, akkor γ monomorfizmus;

b) ha ε monomorfizmus, és β és δ epimorfizmusok, akkor γ epimorfizmus.

c) ha α, β, δ és ε izomorfizmusok, akkor γ is izomorfizmus.

2. Számítsuk ki $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ értékét minden n-re a derivált funktor definíciójából, illetve a $0 \to K \to P_0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ rövid egzakt sorozathoz rendelt hosszú egzakt sorozatból Mod-$\mathbb{Z}$-ben!

3. a) Legyen $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ egzakt, és P_0 projektív. Bizonyítsuk be, hogy $0 \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(P_0, N) \to \mathrm{Hom}(K_1, N) \to \mathrm{Ext}^1(M, N) \to 0$ egzakt.

b) Legyen $0 \to K_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ egzakt, és tegyük fel, hogy itt P_i projektív minden i-re. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Ext}^n(M, N) \cong \mathrm{Ext}^1(K_{n-1}, N)$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $X_1, \ldots, X_n \in \text{mod-}A$, $\dim_K X_i = d_i \ \forall i$, és

$$0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n \to 0 \ \text{ egzakt,}$$

akkor $d_1 + d_3 + \ldots = d_2 + d_4 + \ldots$, azaz $d_n = d_{n-1} - d_{n-2} + d_{n-3} - d_{n-4} + \ldots$.

5. Tegyük fel, hogy az A gráfalgebra reguláris modulusának Loewy-diagramja $A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & 3 & \\ & 4 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}$.

a) Határozzuk meg $\mathrm{Ext}^3_A(\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix})$ dimenzióját.

b) Számoljuk ki $\dim \mathrm{Ext}^3_A(\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$-et.

c) Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik $k > n$, hogy $\dim \mathrm{Ext}^k_A(\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy additív kovariáns funktor akkor és csak akkor visz minden rövid egzakt sorozatot jobbról egzaktba ($0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egzakt $\Rightarrow F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ egzakt), ha minden egzakt $X \to Y \to Z \to 0$ sorozatra az $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ sorozat egzakt.

Hf2. Számítsuk ki $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ értékét Mod-$\mathbb{Z}_4$-ben minden n-re!