1. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ jobb R-modulus minden $M \in \text{Mod-}R$-re, és lássuk be, hogy $\mathrm{Hom}_R(R, -)$ additív, kovariáns funktor, amely természetesen izomorf az identitás funktorral!

2. Legyen $\xi : 0 \to N \to L \to M \to 0$ bővítés egy A algebra moduluskategóriájában, és φ_c a $c \neq 0$ testelemmel való szorzás mint automorfizmus a modulusokon. Bizonyítsuk be, hogy $\xi\varphi_c = \varphi_c\xi$

3. Legyenek $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Ex}(M, N)$, és $f_1, f_2, f \in \mathrm{Hom}(M', M)$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $f\Delta_M = \Delta_{M'}(f \oplus f)$;
b) $f_1 + f_2 = \Delta_{M'}(f_1 \oplus f_2)\nabla_M$;
c) $(f_1 + f_2)\xi = f_1\xi + f_2\xi$;
d) 0ξ felhasadó;
e) 0ξ nullelem $\mathrm{Ex}(M, N)$-ben, és $-\xi := (-\mathrm{id}_M)\xi = \xi(-\mathrm{id}_N)$ additív inverze a ξ-nek.

4. Az öröklődő (pontosabban jobb öröklődő) gyűrűt azzal definiáltuk, hogy mod-R minden projektív modulusának minden részmodulusa is projektív. Bizonyítsuk be, hogy R akkor és csak akkor öröklődő, ha minden injektív modulus minden homomorf képe injektív.

5. Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & 4 \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}.$$

Határozzuk meg a következő modulusok projektív dimenzióját!

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, \qquad \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}, \qquad \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \qquad \begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ & 3 \end{smallmatrix}$$

6. a) Bizonyítsuk be, hogy ha M nem projektív, és $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ az M projektív feloldásának első lépése, akkor $\mathrm{pd}\, M = 1 + \mathrm{pd}\, K_1$.
b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{pd}(M \oplus N) = \max\{\, \mathrm{pd}\, M, \mathrm{pd}\, N \,\}$.
c) Határozzuk meg az 5. feladat algebrájának globális dimenzióját.

Hf1. Határozzuk meg az $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)$ csoportot, és adjunk meg $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_3$ között két nem ekvivalens, nem felhasadó bővítést!

Hf2. Határozzuk meg annak az A gráfalgebrának a globális dimenzióját, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & 3 & \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & 4 & \\ & 1 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}.$$